БИБЛИОТЕКА ЖУРНАЛА «РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА»

R&C Dynamics

Венцеслас С. Ярдецкий

Теории фигур небесных тел

Институт Компьютерных Исследований

Институт
Компьютерных
Исследований

Библиотека журнала «Регулярная и хаотическая динамика»

Вышел из печати сборник:

ТЕОРИИ ФИГУР НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

THEORIES OF FIGURES OF CELESTIAL BODIES

Wenceslas S. Jardetzky

With a Foreword by
Otto Struve

Dover Publications, Inc.
Mineola, New York

Венцеслас С. Ярдецкий

Теории фигур небесных тел

Перевод с английского
Н. А. Зубченко

Под редакцией
А. В. Борисова, И. С. Мамаева и Т. Б. Ивановой

Институт Компьютерных Исследований

Москва ♦ Ижевск

2012

УДК 521.14/17
ББК 22.622.8
Я715

Ярдецкий В. С.

Теории фигур небесных тел. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2012. — 300 с.

Предлагаемая книга В. С. Ярдецкого посвящена вопросам теории фигур равновесия и деформации вращающихся масс жидкости. В первых шести главах кратко изложены классические результаты, с которых традиционно начинается изучение фигур равновесия, а также более подробно рассмотрены методы Ляпунова, Пуанкаре, Лихтенштейна и Вавра. Во второй части книги обсуждаются вопросы, которым, как правило, уделяется крайне мало внимания, например, вопросы взаимодействия твердого ядра и жидкой оболочки, твердой оболочки и жидкого вихревого наполнения и т. д. Также приводится ряд приложений, подготовленных редакторами перевода, которые будут полезны для более глубокого изучения затронутых в книге В. С. Ярдецкого вопросов.

Издание предназначено студентам старших курсов, аспирантам, а также специалистам, которые смогут не только освежить свои знания, но и ознакомиться с новыми результатами в этой классической области.

ISBN 978-5-4344-0065-7 **ББК 22.622.8**

http:// shop.rcd.ru
http:// ics.org.ru

Оглавление

Предисловие к русскому изданию

Предлагаемая читателю книга В. С. Ярдецкого (16.04.1896–21.10.1962) посвящена классическому вопросу небесной механики о фигурах равновесия и деформации вращающихся масс жидкости. Исследования в данной области восходят к классическим работам Ньютона, Маклорена, Якоби, и особенное развитие, как отдельная математическая дисциплина, приобрели в связи с исследованиями Пуанкаре и Ляпунова, которые, исследуя равновесие эллипсоидальных и близких к ним фигур, развивали также методы анализа устойчивости.

Вопросам динамики и равновесия жидких самогравитирующих тел, включая проблему устойчивости и неоднородной стратификации, посвящено большое количество классических работ выдающихся математиков XIX и начала XX века. И до сих пор задача определения фигур равновесия притягивает умы знаменитых математиков, физиков, механиков. На сегодняшний день существует сравнительно мало переведенной на русский язык литературы по данному направлению. В 30-х годах XX века был переведен IV том «Курса механики» Аппеля, посвященный однородным фигурам равновесия [3]. В 60–70-х годах были переведены книги Чандрасекхара [9] и Лихтенштейна [7], возродившие интерес к теории вращающейся жидкости. Не так давно в издательстве «РХД» было издано еще две книги на русском языке: Пуанкаре А. «Фигуры равновесия жидкой масс» [8] и Р. А. Литтлтон «Устойчивость вращающихся масс жидкости» [6]. Также, с новыми исследованиями, касающимися динамики жидких эллипсоидов, можно ознакомиться в сборнике работ под редакцией А. В. Борисова, И. С. Мамаева [4]. Данный сборник охватывает результаты, связанные, главным образом, с выведением различных форм уравнений движения и исследованием качественных свойств динамики жидких эллипсоидов (см. также книгу [5]).

Автор представляемой книги — серьезный специалист в вопросах равновесия, динамики и устойчивости самогравитирующей вращающейся жидкости, был одним из последних учеников Ляпунова, слушателем его лекций в Одессе (1918 год). Ряд вопросов и задач, рассмотренных в данной книге, были поставлены Ляпуновым в последние годы его жизни.

Книга Ярдецкого имеет свою специфику, свой стиль изложения: краткость и конспективность, которые позволяют в небольшом объеме осветить наиболее точные методы теории фигур равновесия и наиболее важные результаты. Она охватывает многие незатронутые в сборнике [4] вопросы. В первых шести главах кратко представлены классические результаты, с которых традиционно начинается изучение фигур равновесия (базовые предположения, основные уравнения), а также более подробно изложены методы Ляпунова, Пуанкаре, Лихтенштейна и Вавра. Во второй части книги обсуждаются вопросы, которые часто ускользают от авторов, пишущих о наблюдаемых фигурах равновесия, например, вопросы взаимодействия твердого ядра и жидкой оболочки, твердой оболочки и жидкого вихревого наполнения (Глава 9)[1].

Несмотря на обширный круг затронутых вопросов, существует ряд проблем, которые Ярдецкий упоминает лишь частично и которые были к моменту написания книги недостаточно развиты. Например, определение фигур равновесия сжимаемой, стратифицированной жидкости или жидких тел с вихревым заполнением. Поэтому в конце мы приводим приложения, которые основаны на совместных статьях редакторов, а также перевод классических работ, которые, по нашему мнению, могут быть полезны для расширения общих знаний в данной области.

В приложении A представлен перевод части работы Верроне [2], в которой показано, что равновесие неоднородной жидкости в случае эллипсоидальных поверхностей невозможно.

В приложении B также представлен перевод с французского статьи Глоба-Михайленко [1], в которой он приводит упрощенный двумерный аналог функций Ламе, как элементарное введение в методы Ляпунова, и проводит анализ плоских фигур равновесия. Для определения фигур равновесия близких к эллипсоидальным Пуанкаре и Ляпунов использовали разложение потенциала по функциям Ламе, зависящих от трех эллиптических координат. Однако для первоначального понимания данного вопроса читателю будет полезно изучение представленной работы.

Приложение C, как и приложение B, посвящено исследованию однородных плоских фигур равновесия, или эллиптических цилиндров. Несмотря на то, что Ляпунов относил подобные задачи к математическим курьезам, двумерная задача гораздо проще с точки зрения анализа устойчивости и поиска точек бифуркации, а также для демонстрации применения современных топологических методов анализа, которые впоследствии могут использоваться в трехмерной системе.

---

[1]Задача о движении твердого тела с полостями, наполненными жидкостью, динамика жидкого самогравитирующего эллипсоида также подробно исследовались В. А. Стекловым, учеником А. М. Ляпунова. С переводом данных работ читатель может ознакомиться в сборнике «Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского». Сост. А. В. Борисов, И. С. Мамаев, А. В. Цыганов, М.– Ижевск: НИЦ «РХД», Институт компьютерных исследований, 2011.

К сожалению, изучению стратифицированных фигур с внутренним вращением в литературе уделено крайне мало внимания и, зачастую, в силу аналитических сложностей, результаты, имеющие строгий математический характер, не приводятся. В приложении D мы предлагаем читателю недавние исследования в этой области, в ходе которых были получены новые фигуры равновесия — сфероиды с непрерывной гомофокальной стратификацией. Получены в общем виде выражения для давления, угловой скорости и гравитационного потенциала данного сфероида с произвольной функцией плотности.

Эта книга может быть рекомендована студентам старших курсов, впервые изучающим предмет, и специалистам, которые могут не только освежить свои знания, но и ознакомиться с совсем новыми результатами в этой классической области.

Литература

[1] Globa-Mikhaïlinko B. Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation. Journal de Mathématiques, 7e série, 1916, II, fasc. 1.

[2] Veronnet A. Rotation de l'ellipsoide heterogene et figure exacte de la Terre Journ. de Mathematiques pures et appliquees, 1912, vol. 8, ser. 6, pp. 331–463.

[3] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. – Л.–М.: ОНТИ, 1936. – 376 с.

[4] Борисов А. В., Мамаев И. С. (ред.) Динамика жидких и газовых эллипсоидов. — Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. — 364 стр.

[5] Кондратьев Б. П. Динамика эллипсоидальных гравитирующих фигур. — М.: Наука, 1989. — 272 с.

[6] Литтлтон Р. А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. — Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. – 240 с.

[7] Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. – М.: Наука, 1965. – 252 с.

[8] Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. – Ижевск: НИЦ «РХД», 2001. – 208 с.

[9] Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973. – 288 с.

Предисловие

Сэр Артур Эддингтон как-то заметил, что одна из самых глубоких тайн Вселенной состоит в том, что все в ней вращается. Метеоры, астероиды, планеты и спутники, Солнце, звезды, их скопления, туманности и даже галактики вращаются вокруг своих осей. При этом их формы подвергаются деформации, незаметной в случае с Солнцем, экваториальная скорость вращения которого составляет всего 2 км/сек, но легко различимой с помощью небольшого телескопа в случае с Юпитером или Сатурном.

Есть много горячих звезд, экваториальные скорости вращения которых приближаются к значениям порядка 500 км/сек. У ряда белых карликов можно обнаружить даже бóльшие скорости. Такие звезды, видимо, значительно сплющены, и у нескольких из них мы фактически наблюдаем вытекание газов на острых краях их экваторов с образованием плоских, вытянутых газообразных колец в их экваториальных плоскостях.

В книге профессора Ярдецкого рассматриваются фигуры равновесия и деформации вращающихся тел, и появилась она очень своевременно. Данная теория обычно связывается с именами Пуанкаре, Дарвина, Ляпунова и Джинса, хотя свой вклад в нее внесли и многие другие выдающиеся астрономы и математики, в том числе и сам доктор Ярдецкий. На ранних этапах ее развития целью теоретиков было определение последствий все возрастающей угловой скорости вращения. В звездной астрономии данная проблема приобрела новую значимость, так как сейчас — в основном благодаря трудам Л. Дж. Хеньи в Беркли и Б. Стрёмгрена (Чикагский университет) — можно проследить, как вследствие гравитационного процесса происходит уплотнение диффузной газовой массы, известное как сжатие Кельвина, и как по истечении нескольких сотен тысяч лет она превращается в звезду главной последовательности. Момент импульса первоначального облака при сжатии сохраняется, и вновь образовавшаяся звезда вращается вокруг своей оси. Но еще до того, как звезда достигнет главной последовательности, внутри нее начинают действовать ядерные процессы, которые поддерживают звезду в равновесии на главной последовательности в течение длительного времени — миллионов, миллиардов или даже десятков миллиардов лет. Однако запасы водородного ядерного топлива постепенно подходят к концу. Затем звезда снова начинает расширяться — сначала медленно, за счет процесса, впервые исследованного С. Чандрасекхаром и М. Шёнбергом , а потом все быстрее в соответствии с новой теорией М. Шварцшильда и А. Сэндиджа. Звезда взрывается и остывает: она становится диффузным гигантом. Ее поверхностное вращение должно снова измениться, а соответственно, и форма ее поверхности. Наблюдения показывают, что многие из этих «старых» гигантов вращаются намного быстрее, чем ожидалось; значения порядка 75–100 км/сек не являются чем-то особенным. Таким образом, из этих скоростей можно сделать вывод о распределении вещества внутри гигантских звезд.

Профессор Ярдецкий был последним из многих учеников покойного А. М. Ляпунова, работу которого он рассмотрел в этой книге. В 1918 году, во время революции в России, Ляпунов поселился в Одессе, где тогда жил молодой математик Ярдецкий. В последний год своей жизни (в 1918 г. он покончил жизнь самоубийством) Ляпунов прочитал ряд лекций о своих исследованиях в университете. Впоследствии эти лекции были опубликованы Академией наук СССР в 1925 г. под заголовком *Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation*. В этом научном труде он представил самые общие результаты из области своей магистерской диссертации от 1884 г. об устойчивости эллипсоидных форм равновесия вращающейся жидкости, снискавшей ему международное признание. Следует подчеркнуть, что многие из более поздних результатов Ляпунова в западном мире остались практически неизвестными.

Астрономам, возможно, будут интересны некоторые данные личного характера. А. М. Ляпунов был сыном астронома М. Ляпунова, который примерно в середине 19 века заведовал Казанской обсерваторией. Там отец занимался различными астрономическими наблюдениями, включая детальное изучение положений звезд, связанных с туманностью Ориона. В 1862 г. он, совместно с Отто Струве-старшим, опубликовал по этой теме работу. Сын научился азам астрономии у своего отца. Однако его математические наклонности были результатом вдохновения, полученного от великого математика Чебышева в Петербургском университете. Несколько самых продуктивных лет своей жизни Ляпунов-младший провел в качестве профессора аналитической механики Харьковского университета, где он был связан с отцом автора этих строк. К сожалению, последний никогда не имел возможности учиться под руководством Ляпунова. Свои знания в этой области он получил от одного из самых первых учеников Ляпунова – Н. Н. Салтыкова.

Отто Струве
Профессор астрофизики (Калифорнийский университет)
Директор обсерватории им. Лейшнера (Беркли, Калифорния)

Часть I

Фигуры равновесия вращающейся жидкой массы

Глава 1
Введение

Теорию фигур небесных тел развивал ряд выдающихся математиков, прежде всего Маклорен, Якоби, Пуанкаре и Ляпунов. Однако их исследования в значительной степени ограничивались случаем изолированной жидкой массы при равномерном вращении. Этот подход оправдан по двум причинам. Во-первых, фигуры небесных тел фактически лишь немного отличаются от фигур, задаваемых решениями данной задачи (например, сферы, эллипсоидов Маклорена и Якоби, фигур Пуанкаре и Ляпунова), а, во-вторых, существование таких фигур можно было бы доказать самыми строгими методами математического анализа.

В этой области, пожалуй, еще можно было бы получить некоторые прогрессивные результаты, но более интересным и важным представляется развитие точной теории, которая учитывала бы условия, более близкие к действительности. В качестве следующего приближения должны рассматриваться вариации фигур и стратификация небесных тел, возникающие в результате внутренних движений. Некоторые вариации важны прежде всего при исследовании звездной структуры. С другой стороны, ряд особенностей, наблюдаемых в земной коре, и аналогичных особенностей, несомненно существующих в коре любой другой затвердевшей планеты, также можно объяснить отклонением от условий равновесия. Таким образом, возникает множество задач, в которых фигуры небесных тел необходимо определять в условиях, отличных от равновесия.

В первых шести главах рассматриваются наиболее точные методы, используемые в теории фигур равновесия, и наиболее важные результаты. Вторая часть книги посвящена некоторым другим задачам, связанным с фигурами небесных тел. Многие из этих задач еще ждут своего решения с помощью таких же строгих методов, как и те, что были разработаны в рамках теории фигур равновесия.

1.1. Основная задача

Решение следующей задачи гидродинамики приводится с целью объяснения формы Солнца и других небесных тел. Пусть жидкая масса вращается в пространстве как твердое тело. Предположим, что это тело изолировано от других тел, а его частицы подвержены действию взаимного притяжения в соответствии с ньютоновским законом тяготения. Какова фигура этой массы?

Когда задача представляется в таком общем виде, учитываются не все условия. Тем не менее, используя уравнения движения жидкой массы, мы можем сделать несколько важных предварительных заключений. Назовем ось z осью вращения массы и выберем центр масс за начало координат прямоугольной системы осей $Oxyz$. Через ω обозначим угловую скорость. Тогда скорость $\mathbf{v}$ точки M задается выражением

$$\mathbf{v} = \omega \times \boldsymbol{r}, \tag{1.1.1}$$

если вектор $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ равен **OM**. Ускорение M имеет следующие компоненты: $-\omega^2 x$, $-\omega^2 y$, 0. Пусть fU — гравитационный потенциал, f — гравитационная постоянная, а $\varkappa$ и p — плотность и давление жидкости. Уравнения движения жидкой массы можно записать либо в векторной форме:

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = \operatorname{grad} fU - \frac{1}{\varkappa}\operatorname{grad} p, \tag{1.1.2}$$

либо в скалярной форме

$$-\omega^2 x = f\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y = f\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial y},$$
$$0 = f\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial z}. \tag{1.1.3}$$

Если предположить, что ω постоянна, с помощью (1.1.3) получим

$$f dU + \frac{\omega^2}{2}d(x^2+y^2) = \frac{1}{\varkappa}dp. \tag{1.1.4}$$

В двух случаях, а именно при $\varkappa = \text{const}$ или $\varkappa = \varphi(p)$, мы имеем интеграл этого уравнения в виде

$$fU + \frac{\omega^2 s^2}{2} = \int\frac{dp}{\varkappa} + \text{const}, \tag{1.1.5}$$

где $s = \sqrt{x^2+y^2}$ является расстоянием от частицы до оси вращения.

Для ньютоновского закона тяготения мы имеем[1]

$$U = \int_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D}, \tag{1.1.6}$$

где D — расстояние от частицы в точке M до элемента dV'.

Если жидкая масса изолирована в пространстве, давление на ее граничной поверхности стремится к нулю:

$$p = 0. \tag{1.1.7}$$

Таким образом, граничная поверхность принадлежит ко множеству поверхностей равного давления. Общее условие для данного множества можно получить, просто положив $p = \text{const}$ в (1.1.5):

$$\int_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} + \frac{\omega^2 s^2}{2f} = \text{const}. \tag{1.1.8}$$

В случае, когда $\varkappa = \varphi(p)$, поверхности $p = \text{const}$ совпадают с поверхностями равной плотности.

В общем, объем V жидкой массы в уравнении (1.1.8) неизвестен, а форму этой массы необходимо выбирать таким образом, чтобы удовлетворить этому уравнению. Как видим, задача, которую мы поставили в ее самой простой форме, ведет к решению функционального уравнения (1.1.8), где пределы интегрирования в первом слагаемом неизвестны[2].

Частный случай этой задачи получается при рассмотрении фигур равновесия жидкой массы в состоянии покоя. Так как сейчас мы предполагаем, что $\omega = 0$, эти фигуры должны определяться решениями уравнения

$$\int_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} = \text{const}. \tag{1.1.9}$$

Необходимо помнить, что при выведении интеграла (1.1.5) мы считали, что жидкие среды обладают одним из двух свойств: либо $\varkappa = \text{const}$,

[1]Теорию фигур небесных тел несложно распространить на случай закона тяготения с потенциалом, лишь немного отличающимся от (1.1.6), как было показано Ярдецким [5].

[2]С помощью метода Дирихле это уравнение можно преобразовать в интегральное. В итоге получится нелинейное уравнение с четырехкратными интегралами, имеющими пределы $\pm\infty$ и очень сложную подынтегральную функцию.

то есть жидкая среда является однородной и несжимаемой, либо $\varkappa = \varphi(p)$, то есть жидкая среда сжимаема и однородна по составу, но ее плотность может изменяться в зависимости от давления. Однако очевидно, что уравнения (1.1.3) выполняются без этих ограничений, и мы можем исследовать также фигуры равновесия жидкой массы, состоящей из конечного или даже бесконечного числа несжимаемых жидких сред разной плотности, или фигуры сжимаемой и неоднородной массы.

Помимо равномерного вращения жидкой массы вокруг неподвижной оси, существуют другие типы движения, определяемые уравнением (1.1.3). Задачи, связанные с этими более общими движениями, будут рассмотрены в последующих разделах книги.

1.2. Замечания относительно базовых предположений

Чтобы решить задачу из теории фигур равновесия или, в общем случае, определить фигуры вращающейся жидкой массы, мы делаем некоторые базовые предположения относительно физических свойств жидкой среды, характера ее движения, распределения массы и пр. Некоторые из этих предположений мы сейчас рассмотрим.

Для движения жидкой среды условие непрерывности может быть записано либо в виде

$$\frac{d\varkappa}{dt} + \varkappa \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{1.2.1}$$

либо как

$$\frac{\partial\varkappa}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varkappa + \varkappa\operatorname{div}\mathbf{v} = 0. \tag{1.2.1$'$}$$

В случае постоянного движения мы имеем $\partial\varkappa/\partial t = 0$, то есть плотность $\varkappa$ не зависит от времени явным образом. Однако в некоторых неизменных фигурах жидкой массы плотность частицы не будет изменяться вдоль ее траектории, в силу чего мы имеем $d\varkappa/dt = 0$. С помощью (1.2.1) и (1.2.1$'$) получаем $\operatorname{div}\mathbf{v} = 0$ и

$$\mathbf{v}\cdot\operatorname{grad}\varkappa = 0. \tag{1.2.2}$$

Так как вектор $\operatorname{grad}\varkappa$ перпендикулярен поверхности равной плотности $\varkappa = \text{const}$, скорость $\mathbf{v}$ должна лежать в касательной плоскости, проходящей через данную частицу или точку в жидкой среде.

Если движение жидкой массы обладает вышеупомянутыми характеристиками, уравнение непрерывности будет иметь вид

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0 \tag{1.2.3}$$

как для несжимаемой жидкой массы, так и для сжимаемой. Несложно увидеть, что если скорость $\mathbf{v}$ задается выражением (1.1.1), то уравнению (1.2.3) будет удовлетворять либо $\omega = \mathrm{const}$, либо $\omega = F(x^2 + y^2, z)$, т. е. в обоих случаях

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = -\frac{\partial(\omega y)}{\partial x} + \frac{\partial(\omega x)}{\partial y} = 0.$$

Таким образом, предположение о вращающейся фигуре равновесия совместимо с условием (1.2.3).

Второе предположение о характере движения связано с существованием оси вращения. Аппель [1] доказал, что необходимым условием существования фигуры равновесия жидкой массы является вращение относительно оси, имеющей направление, неизменное в пространстве, и совпадающей с одной из главных осей инерции данной массы. Ярдецкий [3] показал, что это условие выполняется и для более общего вида вращения — так называемого зонального вращения,— а также для смешанных систем типа тела, состоящего из твердой и жидкой частей.

Нет необходимости делать специальные предположения о симметрии фигур равновесия. Как известно (см., например, работу Аппеля [1]), ось вращения может быть осью симметрии вращающейся жидкой массы, но это совсем не обязательно. Например, для случая однородной массы можно показать, что через эту ось проходит конечное число плоскостей симметрии. С другой стороны, Лихтенштейн [1] доказал, что фигура равновесия должна иметь плоскость симметрии, перпендикулярную оси вращения.

Что касается предположения о физических свойствах жидкой среды, необходимо сделать несколько дополнительных замечаний. Судя по вышесказанному, нам придется иметь дело с фигурами однородной или неоднородной, сжимаемой или несжимаемой жидкой массы. Жидкая среда обычно считается изотропной. Теории фигур анизотропной жидкой среды пока что не существует.

В самом простом случае жидкая масса считается несжимаемой и однородной в том смысле, что плотность имеет всюду равные значения, и что эти значения не могут изменяться под действием меняющегося давления. Тогда уравнение (1.1.8) принимает вид

$$\int\limits_V \frac{dV'}{D} + \frac{\omega^2 s^2}{2f\varkappa} = \mathrm{const}. \tag{1.2.4}$$

Левая часть этого уравнения является неизвестной функцией координат, определяемой формой граничной поверхности S объема V. Если значение постоянного правого члена берется при $p = 0$, то задача фигур равновесия состоит в нахождении некоторого множества поверхностей S таким образом, чтобы для соответствующего объема V выполнялось условие (1.2.4), то есть чтобы уравнение (1.2.4) было уравнением любой из этих поверхностей.

Вторая задача теории фигур равновесия связана со случаем, когда плотность зависит только от давления $\varkappa = \varphi(p)$. В классической гидродинамике эти жидкие среды обычно называются неоднородными. Чтобы решить задачу в данном случае, необходимо воспользоваться уравнением (1.1.8) или (1.1.5), так как последнее уравнение позволяет получить поверхности уровня. При сделанном нами допущении о физических свойствах жидкой среды, поверхности $p = \mathrm{const}$, $\varkappa = \mathrm{const}$ и поверхности уровня (поверхности равного гравитационного потенциала в случае Земли) будут совпадать, если выполняется (1.1.5). В этом уравнении плотность $\varkappa$ является переменной, которая будет определять стратификацию. Наружный слой жидкой среды соответствует $\varkappa = \varphi(0)$.

Что касается уравнения состояния $\varkappa = \varphi(p)$, оно может определить непрерывную функцию, или мы можем рассмотреть систему, состоящую из конечного числа жидких сред, отличающихся по своим физическим свойствам, накладываемым друг на друга, тогда для каждого слоя будет выполняться частное уравнение состояния. Можно также рассматривать жидкую среду, для которой не делается никаких допущений типа $\varkappa = \mathrm{const}$ или $\varkappa = \varphi(p)$. В таком случае мы просто постулируем непрерывную стратификацию с плотностью, выражаемой через координаты. Для таких жидких сред условия (1.1.4) и (1.1.5) не всегда справедливы, и, следовательно, их рассмотрение должно начинаться с уравнений (1.1.3).

В задачах, касающихся вышеупомянутых фигур равновесия, стратификация неоднородной жидкой среды заранее не известна и должна быть определена. Фигура такой жидкой среды определяется формой наружного слоя. Конечно, не всегда возникает необходимость пользоваться этим прямым способом. Иногда можно сделать допущения о форме граничной поверхности и постулировать определенную стратификацию. Затем необходимо проверить, не нарушаются ли сделанными допущениями все остальные условия.

Вольтерра [2] доказал, что в случае равновесия слои равной плотности не могут иметь форму поверхности второй степени, и это доказательство было обобщено на зональное вращение (см., например, работу Ярдецкого [4]). Однако когда рассматривается приближенное решение, например, для медленного вращения, в отношении которого нам известно, что поверхности равной плотности будут лишь немного отличаться от сферической формы, определенной степенью приближения служит эллипсоидная стратификация.

Принято считать, что в фигуре равновесия плотность увеличивается по направлению к ее центру. Так, распределение массы Земли представлено общеизвестными законами Леви, Липшица, Роша и рядом других законов того же типа.

Упомянем еще одно допущение о том, что в случае неоднородной жидкой среды поверхности равной плотности образуют множество замкнутых поверхностей, каждая из которых включает в себя предшествующую.

1.3. Распределение плотности

При исследовании фигур равновесия обычно предполагается, что плотность является возрастающей функцией расстояния до поверхности тела. Однако мы можем представить доказательство этого факта как минимум для одного случая. Доказав, что сфера является единственно возможной фигурой равновесия изолированной жидкой массы, пребывающей в состоянии покоя, Ляпунов [10] также показал, что в силу условий равновесия плотность увеличивается от поверхности к центру. Приведем данное им доказательство.

Пусть A — радиус сферы, являющейся граничной поверхностью жидкой массы в состоянии покоя, а $\varkappa$ — ее плотность. Очевидно, что, если неоднородная жидкая масса находится в состоянии равновесия, она должна состоять из концентрических сферических слоев. В общем случае плотность может быть функцией параметра α. Однако если жидкая среда сжимаема, а $\varkappa = \varphi(p)$, можно показать, что $\varkappa = \psi(\alpha)$ не может быть произвольной функцией. С помощью уравнения (1.1.9) можно ввести поверхность уровня

$$\int\limits_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} = \text{const} = \alpha. \tag{1.3.1}$$

Тогда из (1.2.4) и (1.1.5) следует, что

$$\frac{1}{f} \int\limits_0^p \frac{dp}{\varphi(p)} = \alpha - \alpha_0, \tag{1.3.2}$$

если $\omega = 0$, а α_0 соответствует $p = 0$, то есть свободной поверхности жидкой среды. Таким образом, из этого уравнения мы получаем $p = p(\alpha)$ и, подставляя эту функцию в уравнение состояния, имеем $\varkappa = \psi(\alpha)$. Чтобы доказать, что плотность является функцией, возрастающей по направлению к центру, преобразуем интеграл (1.3.1). Пусть U_M — потенциал в точке $M(x, y, z)$ на расстоянии r от центра O жидкой массы, а элемент $\varkappa' \, dV'$ взят в точке $M'(x', y', z')$ на расстоянии r'. Выбирая полярную ось вдоль OM, мы полагаем, что угол θ соответствует географической широте, а λ — долготе. Пусть θ' — угол между r и r', а $d\sigma'$ — элемент сферы, имеющей единичный радиус. Тогда $d\sigma' = \sin\theta' \, d\theta' \, d\lambda$, а $D = \sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'}$. Теперь мы можем записать

$$U_M = \int\limits_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} = \int\limits_0^A \varkappa' r'^2 \, dr' \int \frac{d\sigma'}{D}, \tag{1.3.3}$$

так как элемент объема dV' на расстоянии r' равен $r'^2 \, d\sigma' \, dr'$.

Интеграл по единичной сфере равен

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = 2\pi \int\limits_0^\pi \frac{\sin\theta' \, d\theta'}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'}} = \frac{2\pi}{rr'} \left[\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos\theta'} \right]_0^\pi = \frac{2\pi}{rr'} \left[r + r' - |r - r'| \right].$$

При $r' < r$ это выражение равно

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = \frac{4\pi}{r},$$

а при $r < r'$ мы имеем

$$\int \frac{d\sigma'}{D} = \frac{4\pi}{r'}.$$

Тогда для каждой точки M внутри жидкой среды с помощью (1.3.3) получаем

$$\int\limits_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} = \frac{4\pi}{r} \int\limits_0^r \varkappa' r'^2 \, dr' + 4\pi \int\limits_r^A \varkappa' r' \, dr'.$$

Теперь, если взять все точки сферы радиуса $r = a$, получится

$$\int\limits_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} = \frac{4\pi}{a} \int\limits_0^a \varkappa a^2 \, da + 4\pi \int\limits_a^A \varkappa a \, da,$$

где $\varkappa$ должно выражаться через a.

Следовательно,

$$\frac{d}{da}\int \frac{\varkappa' \, dV'}{D} = -\frac{4\pi}{a^2}\int\limits_0^a \varkappa a^2 \, da. \tag{1.3.4}$$

Очевидно, что в силу условия $\varkappa > 0$ интеграл, взятый по переменной a, является положительным числом. Поскольку

$$\frac{d}{da}\int \frac{dp}{\varphi(p)} = \frac{d}{dp}\int \frac{dp}{\varphi(p)} \cdot \frac{dp}{da} = \frac{1}{\varkappa}\frac{dp}{da},$$

с помощью (1.1.5) и (1.3.4) получаем, что

$$\frac{dp}{da} = f\varkappa \frac{d}{da}\int \frac{\varkappa' \, dV'}{D} < 0. \tag{1.3.5}$$

Таким образом, давление в сферической фигуре равновесия увеличивается по направлению к центру. Если рассмотреть случай, когда плотность жидкой среды является возрастающей функцией давления, то плотность в фигуре равновесия также должна возрастать от свободной поверхности к центру.

В случае неоднородной и несжимаемой жидкости мы обычно *полагаем*, что плотность является возрастающей функцией глубины, а иначе равновесие было бы неустойчивым.

Другое доказательство теоремы о том, что единственно возможным решением задачи о равновесии жидкой массы в состоянии покоя является сфера, было представлено Карлеманом [1].

1.4. Развитие методов решения

Мы уже видели, что задача о фигурах равновесия жидкой массы даже в простейшем виде требует решения функционального уравнения (1.1.8). В общем виде эта задача еще не решена, то есть известны еще не все возможные фигуры равновесия, несмотря на то, что большинство компетентных исследователей предлагали очень хитроумные методы. С помощью этих методов были получены решения для целого ряда частных задач. Самый полный обзорный анализ теорий, касающихся задачи о равновесии жидкой массы, представлен в четвертом томе сочинения П. Аппеля «Трактат рациональной механики» (*Traité de Mécanique Rationelle*)[3]. Здесь же будет дан лишь краткий обзор, необходимый для понимания развития этих теорий.

[3]В России этот том был издан отдельной книгой: П. Аппель. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. МОНТИ, 1936 г. 376 с. — *Прим. ред.*

Как известно, Ньютон понимал важность закона тяготения для объяснения фигур небесных тел и, исследовав условия равновесия в каналах, направленных от центра Земли к экватору и полюсам, пришел к выводу, что фигура Земли представляет собой эллипсоид. Первым строгое математическое доказательство того, что эллипсоид вращения может быть фигурой равновесия изолированной, вращающейся, однородной жидкой массы, представил Маклорен (в 1742 г.). Спустя год было опубликовано исследование Клеро, посвященное неоднородной жидкой среде. В восемнадцатом веке не знали иных точных решений, кроме эллипсоида Маклорена, но попытки получить такие решения предпринимались Мопертюи, Симпсоном, Лежандром и Лапласом. Лежандр предложил отождествить уравнение свободной поверхности жидкой среды с условием, что сумма потенциалов, создаваемых гравитацией и центробежной силой, на этой поверхности постоянна.

Самым простым случаем в теории фигур равновесия, очевидно, является случай однородной жидкой среды ($\varkappa = \text{const}$), и для начала мы отметим успехи, которые были достигнуты в этом случае. Потенциал однородного эллипсоида E, соответствующий закону тяготения Ньютона в точке $M(x, y, z)$ внутри массы, можно записать в виде

$$fU = \text{const} - L_x\frac{x^2}{2} - L_y\frac{y^2}{2} - L_z\frac{z^2}{2}. \tag{1.4.1}$$

Подставляя это выражение в уравнение (1.1.8) и заменяя постоянный член его значением на поверхности равного давления, проходящей через точку M, получаем

$$(L_x - \omega^2)x^2 + (L_y - \omega^2)y^2 + L_z z^2 = C. \tag{1.4.2}$$

Это условие справедливо для всех точек такой поверхности, и частное значение постоянной будет определять поверхность эллипсоида E. Теперь предположим, что эта поверхность задана уравнением

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1. \tag{1.4.3}$$

Положив $L_x = L_y = L$ в (1.4.2), для эллипсоида вращения мы имеем уравнение

$$(L - \omega^2)(x^2 + y^2) + L_z z^2 = C \tag{1.4.2$'$}$$

и, поскольку уравнения (1.4.3) и (1.4.2$'$) должны представлять одну и ту же поверхность, получаем два условия:

$$a^2(L - \omega^2) = c^2 L_z = C. \tag{1.4.4}$$

Величины L_x и L_y можно выразить как через оси эллипсоида, так и через его плотность[4]. Поэтому мы можем найти соответствующие значения ω и C исходя из условий (1.4.4). Таким образом, поверхность жидкой массы будет полностью определена. Несложно доказать (см. стр. 43), что если эллипсоид является фигурой равновесия, то он должен быть сплющен. Из уравнения (1.4.4) и выражений для L_x и L_y следует, что в разных условиях важную роль играют соотношения осей. Если положить $l = \sqrt{a^2 - c^2}/c$, то можно найти условие, которому должны удовлетворять ω, l и $\varkappa$. Это условие имеет вид

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} = \frac{(3 + l^2)\operatorname{tg}^{-1} l - 3l}{l^3}. \tag{1.4.5}$$

Исследование этого уравнения показывает, что существует некоторое предельное значение ω, так что, вообще говоря, необходимо рассматривать три случая, соответствующих данному условию:

$$h = \frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} \lesseqgtr 0{,}2247\ldots. \tag{1.4.6}$$

В первом случае есть два эллипсоида Маклорена, соответствующие одному и тому же значению ω. Если h имеет точно такое же численное значение, как в (1.4.6), или большее значение, то возможен только один такой эллипсоид. Наконец, когда $\omega > \omega_0$, где ω_0 — вышеупомянутое предельное значение, ни один эллипсоид вращения не может быть фигурой равновесия вращающейся жидкой массы.

В 1834 г. Якоби показал, что эллипсоид с тремя разными осями также может быть фигурой равновесия, если оси удовлетворяют некоторым условиям. Теперь, если

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{1.4.7}$$

является уравнением такого эллипсоида, оно должно быть тождественно (1.4.2). Поэтому необходимы условия

$$a^2(L_x - \omega^2) = b^2(L_y - \omega^2) = c^2 L_z. \tag{1.4.8}$$

Дальнейший анализ этого случая был выполнен также Отто Мейером, Лиувиллем, Смитом и Планой. Здесь мы упомянем лишь то, что L_x, L_y и L_z

[4]См. (2.2.7).

можно выразить через a, b и c; следовательно, если дана ω, то соотношения $s = c^2/a^2$ и $t = c^2/b^2$ определяются условиями (1.4.8). Затем, воспользовавшись выражением для заданной массы жидкой среды $m = \frac{4}{3}\pi abc\varkappa$, мы можем вычислить сами оси. Для этих так называемых эллипсоидов Якоби определяется новое предельное значение угловой скорости. Это значение $\omega = \omega_1$ задается условием $h = 0{,}1871\ldots$. При

$$h < 0{,}1871\ldots \tag{1.4.9}$$

возможен только один эллипсоид Якоби, соответствующий данному значению ω и представляющий фигуру равновесия. Для предельного значения ω_1 угловой скорости эллипсоид Якоби становится эллипсоидом вращения.

Для анализа результатов теории вместо угловой скорости можно использовать кинетический момент

$$M = I\omega \tag{1.4.10}$$

(где I — момент инерции относительно оси вращения). С его помощью можно охарактеризовать и начальную скорость заданной массы. Тогда вышеупомянутые результаты будут иметь следующий вид. (а) Если $M = 0$, угловая скорость ω также равна нулю, а соответствующая фигура равновесия представляет собой сферу. (б) Если начальный кинетический момент M имеет значения между 0 и M_0 (или ω изменяется от 0 до ω_0 — предельного значения), соответствующая фигура равновесия представляет собой эллипсоид вращения. (в) Когда M принадлежит интервалу (M_0, ∞), соответствующее значение ω уменьшается от ω_0, но соответствующие эллипсоиды вращения становятся более сжатыми. (г) Для $M = M_1 < M_0$ или $\omega = \omega_1$ эллипсоид вращения совпадает с ограничивающим эллипсоидом Якоби. Теперь рассмотрим эллипсоид, имеющий три разных оси. Такие эллипсоиды могут быть фигурами равновесия, когда M изменяется от M_1 до ∞, тогда как угловая скорость уменьшается до 0, а соотношения осей варьируются между определенными пределами.

Возможно ли существование фигур равновесия, если ω превышает значение ω_0? Эту важную задачу поставил Чебышев. В 1884 г. Ляпунов сумел доказать, что в окрестности предельного эллипсоида ($\omega = \omega_0$) новых фигур равновесия нет, но при этом существуют фигуры равновесия, лишь немного отличающиеся от некоторых определенных эллипсоидов Маклорена и Якоби. Пока M меньше, чем M_1, эллипсоиды вращения устойчивы. При M больше, чем M_1, эллипсоиды Маклорена становятся неустойчивыми, но эллипсоиды Якоби остаются устойчивыми. Исследовав это свойство, Ляпунов обнаружил, что оно выполняется лишь до тех пор, пока не достигнут некоторый предел M_2. Из первого приближения можно сделать вывод, что если бы значение M было увеличено, эллипсоиды Якоби превратились бы в фигуры равновесия нового вида. Это были бы алгебраические поверхности третьего порядка. Годом позже Ляпунова этот новый вид фигур равновесия[5] также обнаружил Пуанкаре. Ляпунов выразил сомнение в возможности доказать существование новых фигур равновесия методом последовательных приближений, и лишь спустя двадцать лет он объяснил причину трудностей, с которыми столкнулась эта теория. Чтобы найти новую фигуру равновесия, лишь немного отличающуюся от эллипсоида, нужно сравнить ее не с данным эллипсоидом, а с переменным эллипсоидом, конфокальным к первому и проходящим через точку, для которой рассматривается значение потенциала. В этом заключалась суть нового метода, разработанного Ляпуновым. Используя этот метод, можно оценить приближение произвольно высокого порядка. Затем, применяя метод Коши, можно показать сходимость последовательных приближений. Поэтому существование этих фигур равновесия можно доказать со всей необходимой точностью. Ниже мы более подробно рассмотрим фигуры однородной жидкой массы, лишь немного отличающеся от эллипсоидов Маклорена и Якоби.

Вне связи с этой группой исследований было представленное Софьей Ковалевской доказательство существования кольцеобразной фигуры равновесия. Несмотря на то что тор может быть фигурой равновесия однородной жидкой массы, этот результат не может применяться на практике, так как данная фигура неустойчива. Чтобы объяснить кольцо Сатурна, мы, скорее, примем гипотезу Кассини, согласно которой оно состоит из скопления твердых частиц (см., например, работы Лихтенштейна [1,2]).

Проблема фигур равновесия значительно усложняется, когда речь заходит о неоднородной массе. Первое точное решение в случае, когда плотность является только функцией давления, также дал Ляпунов. Оно было опубликовано в посмертном научном труде этого исследователя (1925–1927) и представляет окончательный вариант этого метода. Хотя оно является шедевром математической мысли, его очень трудно изучать, так как многие детали расчетов автора опущены. Что касается классических исследований, первое из них представлено исследованием Клеро. Рассматриваемый в нем вопрос известен как задача Клеро. Главной задачей данного исследования является определение сжатия поверхностей уровня и распределения ускорения тяготения на поверхности медленно вращающейся неоднородной жидкой массы при допущении концентрической стратификации. В том же направлении над этой задачей работали Ами, Вероне, Вавр и Дайв, а некоторые частные случаи рассмотрели Вихерт, Клуссман и Хаальк.

[5]См. C. R. Acad. Sci., Paris 1885, а также работу в *Acta Mathematica*.

Обобщение другого вида представил Ляпунов [1, 2]. Он полагает, что любая планета, например Земля, образована совокупностью тонких слоев, каждый из которых имеет постоянную плотность и лишь немного отличается от сферы. Так как плотность этих концентрических слоев может и не быть постоянной функцией радиуса данного слоя, Ляпунов считает свое уравнение более общим, чем уравнение Клеро. Для учета разрывов плотности в данной теории он впервые воспользовался интегралами, представляющими обобщение интегралов Римана в том смысле, который был введен Стилтьесом. Ляпунов [10] дал следующую характеристику методам, используемым в задаче Клеро. Как известно, во втором приближении поверхности уровня определяются как некоторые поверхности вращения четвертого порядка. Таким образом, снова искать элементы эллипсоидов в первом приближении было бы ошибочно, так как они являются элементами тех эллипсоидов, которые сами в первом приближении представляют неизвестные поверхности. Именно поэтому Клеро не смог продвинуться дальше первого приближения. Против теорий Лежандра и Лапласа данное возражение не выдвигалось, но Лаплас использовал допущения, способные вызвать некоторые сомнения. В частности, он *априори* предполагает, что неизвестную функцию можно разложить в ряд сферических функций, и использует такой ряд, сходимость которого сомнительна. Если в уравнении (1.3.3) положить, что

$$r = a(1+\zeta), \quad r' = a'(1+\zeta'), \tag{1.4.11}$$

то потенциал U_M принимает вид

$$U_M = \int\limits_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} = \int\limits_0^A \varkappa' a'^2 \, da' \int \frac{(1+\zeta')^2 \left(1 + \dfrac{\partial(a'\zeta')}{\partial a'}\right) d\sigma'}{D}. \tag{1.4.12}$$

Теперь, Лаплас полагает,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D} &= \frac{1}{r}\sum_0^\infty \left(\frac{r'}{r}\right)^n P_n(\cos\gamma') \quad \text{при } \frac{r'}{r} < 1, \\ \frac{1}{D} &= \frac{1}{r'}\sum_0^\infty \left(\frac{r}{r'}\right)^n P_n(\cos\gamma') \quad \text{при } \frac{r}{r'} < 1, \end{aligned} \tag{1.4.13}$$

где γ' — угол между r и r'.

При $|\zeta| < l$ пределы, с помощью которых определяется сходимость этого ряда, имеют вид

$$a' < a\frac{1-l}{1+l}, \quad a' > a\frac{1+l}{1-l}. \tag{1.4.14}$$

Пуассон указал на то, что существует слой

$$a\frac{1-l}{1+l} < a' < a\frac{1+l}{1-l}, \tag{1.4.15}$$

для которого выражения (1.4.13) недействительны. Этот вопрос также исследовал Калландро, а позднее и Хопфнер [1]. В связи с замечаниями Ляпунова следует упомянуть и так называемое дополнение Тиссерана [1] (том II, стр. 317). Это дополнение стало отправной точкой для исследований Вавра, которые будут рассмотрены ниже.

В одном частном случае, а именно в случае фигуры Земли, данная теория была представлена в виде, отличающемся от использованных другими исследователями. Задача, поставленная Брунсом [1], заключается в исследовании поверхностей уровня как поверхностей, которые определяются общими характеристиками гравитационного потенциала и его производными. Деформации, реально происходившие в истории планеты, конечно, не учитываются, поскольку Брунс рассматривает настоящее распределение масс во внутренней части Земли и не делает предположений о связи между этим распределением и законами гидростатики или некоторыми свойствами плотности. В этом отношении подход, предложенный Брунсом, отличается от подхода, сформулированного Клеро. Последний отождествил фигуру Земли с одной из фигур равновесия. Задача Брунса очень подробно рассмотрена в работе Хопфнера [1].

В работе [2] Аппель предпринял попытку решить задачу о фигурах равновесия новым методом. В частности, он использовал выражение потенциала в точке свободной поверхности, заданной Гауссом. Если записать

$$\int\limits_S \frac{\alpha(\xi-x)+\beta(\eta-y)+\gamma(\zeta-z)}{\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}}\,d\sigma \tag{1.4.16}$$

и

$$\xi = f(\lambda,\mu), \quad \eta = \varphi(\lambda,\mu), \quad \zeta = \psi(\lambda,\mu), \tag{1.4.17}$$

получаем

$$\begin{gathered} \alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \beta = \frac{B}{\sqrt{\cdots}}, \quad \gamma = \frac{C}{\sqrt{\cdots}}, \\ A = \frac{D(\eta,\zeta)}{D(\lambda,\mu)}, \ldots \quad d\sigma = \sqrt{A^2+B^2+C^2}\,d\lambda\,d\mu. \end{gathered} \tag{1.4.18}$$

Тогда уравнение свободной поверхности принимает вид

$$\iint \begin{vmatrix} \xi - x & \eta - y & \zeta - x \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial \eta}{\partial \lambda} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial \lambda} \\ \dfrac{\partial \xi}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \eta}{\partial \mu} & \dfrac{\partial \zeta}{\partial \mu} \end{vmatrix} \frac{d\lambda\, d\mu}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}} + \\ + \omega^2 s^2 - \mathrm{const} = 0. \tag{1.4.19}$$

Решив это интегро-дифференциальное уравнение, можно определить фигуру равновесия вращающейся однородной жидкой массы. Если использовать локальные координаты, это уравнение будет определять одну неизвестную функцию. Судя по всему, о дальнейшем развитии этого метода ровным счетом ничего не известно[6].

1.5. Условия, определяющие фигуры небесных тел

Вопрос о том, как объяснить все наблюдавшиеся фигуры небесных тел, требует дальнейшего уточнения условий, способных сыграть важную роль в образовании тела. Если из списка небесных тел исключить все тела, имеющие неправильную форму, например некоторые планетоиды или туманности, получится несколько различных типов тел, фигурам которых можно дать удовлетворительное объяснение. При кратком обзоре методов, используемых в теории фигур равновесия, описанных в предыдущем разделе, мы упомянули не все условия, которые необходимо учитывать. Однако именно эти условия будут определять степень приближения к фактическому состоянию тела, а в случае Земли они могут быть очень важны для понимания изменения ее фигуры. Теория фигур равновесия не способна объяснить многие характеристики структуры Земли, которые мы должны рассмотреть. Очевидно, что теоретически возможные фигуры определяются набором условий, которые могут касаться либо физического состояния массы небесного тела, либо его кинематического состояния, либо образовывать группу, связанную с динамическим состоянием в целом. По причине того, что относительно фигур небесных тел выдвигались предположения, очень разные по сути, в итоге было получено несколько групп конкретных задач.

Что касается физического состояния, главное условие состоит в том, чтобы небесное тело было жидким сейчас или в прошлом. Большинство из наблюдаемых небесных тел в настоящее время находится именно в таком состоянии, и в целом против второй части наших предположений, каса-

[6] Ниже мы приведем больше ссылок, касающихся развития методов.

ющихся прошлых периодов, тоже нет возражений. Некоторые исключения, например тот факт, что Сатурн, судя по всему, состоит из небольших твердых частиц, не уменьшают важности результатов, основанных на гипотезе текучести. Очевидно также, что за изменением физического состояния тела могут следовать изменения его фигуры, что можно утверждать в случае Земли. Необходимо учитывать и такой фактор, как переход к пластическому состоянию или отвердеванию. Несмотря на то что изменения фигур, вызываемые этими процессами, обычно незначительны по сравнению с размером небесного тела, они очень важны в случае Земли.

Вторая группа условий относится к кинематическому состоянию. В теории фигур равновесия у нас был простой пример постулированного состояния движения или покоя. Если данная жидкая масса вращается вокруг оси, имеющей неизменное в пространстве направление, с постоянной угловой скоростью, то ее фигура не меняется. Однако постоянная угловая скорость не является необходимым условием неизменности фигуры. Жидкие тела, не меняющие своей формы, могут существовать, если есть внутренние движения, которые следуют, например, за распределением скоростей, заданных законом $\omega = F(s^2, z)$, то есть имеют зональное вращение. Могут быть и другие важные кинематические условия, касающиеся некоторого регулярного вида деформации. К этой группе условий относятся заданные пульсации, колебания других типов или нарастающие изменения.

В третьей группе условий следует упомянуть прежде всего закон тяготения, а также влияние других тел. Ясно, что мы можем предположить любой закон тяготения, но во всех классических исследованиях всегда использовался закон Ньютона, поэтому и здесь рассматривается только этот закон. Если пренебречь влиянием других небесных тел, мы имеем простой случай изолированной жидкой массы. Конечно, рассматривались и условия равновесия системы из двух или более жидких тел, так что в более общих задачах мы должны учитывать не только вращение каждого тела, но и его круговое движение, а также изменения каждого из тел, подобные тем, что имеют место в Солнечной системе. Определенные приближения в задачах такого рода оказались возможны из-за очень больших расстояний между представителями системы.

Учитывая большое разнообразие условий, определенный интерес может представлять некоторая классификация задач, которая и представлена здесь. Когда мы рассматриваем фигуру небесного тела, его свободная поверхность в общем случае не является единственным объектом исследования. Также иногда имеет значение стратификация, и поэтому термин «фигура» отныне будет использоваться в более общем смысле, включающем стратификацию. Более или менее исследованными задачами являются следующие.

А. Изолированная масса.

I. Фигуры равновесия:

1) однородной жидкой массы,
2) неоднородной жидкой массы,
3) системы, имеющей твердое ядро и жидкую оболочку,
4) жидкой массы с плавающими твердыми телами,
5) жидкости в твердой коре,
6) пластической массы,
7) упругого твердого тела.

II. Неизменяемые фигуры:

1) зональной вращающейся однородной жидкой массы,
2–7) зональной вращающейся массы, соответствующей условиям, указанным в I., 2–7,
8) массы в некоторых других условиях.

III. Изменяющиеся фигуры:

1) однородной жидкой массы,
2) каждой из вышеупомянутых систем.

Б. Система отдельных тел.

1) жидкая масса и центр массы,
2) система Земля и Луна,
3) система двойных звезд,
4) более сложные системы.

Конечно, мы можем представить лишь небольшую выборку задач. Однако мы попытались включить результаты, охватывающие всю область.

Простейшей в этом списке является задача о фигурах равновесия, которые может иметь изолированная однородная жидкая масса. Как упоминалось ранее, при ее решении возникли ощутимые сложности, так что полного и подробного решения этой задачи нет до сих пор. Методы решения, использованные в этой задаче, равно как и в случае неоднородной жидкости, достигли такой степени совершенства, что некоторые из них можно отнести к наиболее продвинутым математическим методам. Однако часть вышеперечисленных задач в настоящее время пытаются решить с помощью аналогичных методов, поэтому автор не оставляет надежду, что более точные математические методы будут использоваться во всех областях данной теории.

Следует упомянуть о двух направлениях, в которых развивается задача о равновесии жидкой массы в настоящее время. Большинство исследований связано с равновесием и малыми деформациями газовых масс. Поскольку к таковым относятся и звезды, главным объектом изучения является их стратификация. Некоторые общие выводы, сделанные относительно стратификации, также применили и к планетам. Однако для этих небесных тел, и особенно для Земли, более пристальное внимание нужно обратить на факторы типа повышенной вязкости или пластичности, а также на различные периоды процесса затвердевания.

1.6. Интегральное уравнение Лиувилля

Поскольку в некоторых исследованиях, которые нам только предстоит обсудить, использовались так называемые формулы Лиувилля (см. Лиувилль [1,2]), в этом разделе мы их выведем. Эти формулы являются решениями уравнения, принадлежащего к классу однородных интегральных уравнений. Общий вид такого уравнения

$$\int \frac{l'\zeta' d\Omega'}{D} = m\zeta, \tag{1.6.1}$$

причем интеграл берется по некоторой заданной поверхности. Элементом этой поверхности является $d\Omega'$, а D — это расстояние между двумя точками, одна из которых (M') принадлежит данной поверхности. Как обычно, ζ является неизвестной функцией координат второй точки (M), а ζ' — ее значением в точке M'. Множители l' и m мы определим прямо сейчас. Рассматривая единичную сферу Σ и ее элемент $d\sigma'$, можно положить $d\sigma' = l'\,d\Omega'$ и выполнить в уравнении (1.6.1) интегрирование по единичной сфере. Важным для данной теории случаем является случай эллипсоида, и для него мы воспользуемся обозначением

$$\chi = \nu \int \frac{\chi'\,d\sigma'}{D} = \nu \int \frac{l'\chi'\,d\omega'}{D}, \tag{1.6.2}$$

где интеграл берется по соответствующей единичной сфере или по поверхности этого эллипсоида соответственно.

Лиувилль показал, что решения уравнения (1.6.2) можно представить в виде функций Ламе. Поскольку в следующих разделах мы будем использовать специальные обозначения, введем некоторые из них в нижеследующих формулах. Расстояние $D = MM'$ в выражении (1.6.1) или (1.6.2), интерпретируемое как потенциал, мы запишем в виде $D(a,1)$. Новый параметр a принадлежит к группе параметров, которые будут использоваться для определения положения точки. Значение $a' = 1$ относится к тем точкам, относительно которых берется интеграл. Соответствующие полные выражения будут предложены позднее. Мы же предположим, что R, S, M и N являются функциями Ламе[7] n-го порядка, тогда как R и S — это значения первой и второй функций, соответствующие $a' = 1$. Тогда решения уравнения

$$\chi = \nu \int \frac{\chi' d\sigma'}{D(a,1)} \tag{1.6.3}$$

даются в виде формул

$$\begin{aligned}
&\int \frac{l'M'N'\,d\Sigma'}{D(a,1)} = \frac{4\pi}{2n+1} RSMN \quad \text{при } a = 1, \quad M \text{ на эллипсоиде},\\
&\int \frac{l'M'N'\,d\Sigma'}{D(a,1)} = \frac{4\pi}{2n+1} RS'MN \quad \text{при } a < 1, \quad M \text{ — внутренняя точка},\\
&\int \frac{l'M'N'\,d\Sigma'}{D(a,1)} = \frac{4\pi}{2n+1} R'SMN \quad \text{при } a > 1, \quad M \text{ — внешняя точка}.
\end{aligned} \tag{1.6.4}$$

Первый член каждого из уравнений (1.6.4) представляет значение потенциала эллипсоида в точке $M(a, \vartheta, \psi)$, если плотность этой поверхности равна $l'M'N'$, а ϑ и ψ — сферические углы. Из интегрального уравнения (1.6.3) и его решения (1.6.4) следует, что произведения MN являются собственными функциями, а выражения

$$\nu_{n,s} = \frac{2n+1}{4\pi} \frac{1}{RS} \tag{1.6.5}$$

— собственными значениями.

[7]Неудобство, состоящее в одинаковом графическом обозначении функции Ламе M и точки M, только усугубляется тем, что этой же буквой обозначается еще и импульс из раздела 1.4. Однако изменить массу стандартных обозначений для достижения унификации крайне сложно. Поскольку каждый из методов сопряжен с использованием множества концепций, внести корректировки оказалось возможно лишь отчасти. Мы же можем лишь надеяться на то, что использование в разных главах одной и той же буквы для обозначения разных величин не приведет к серьезной путанице.

Для эллипсоида вращения мы имеем

$$\int \frac{l'M'N'\,d\sigma'}{D(a,1)} = \frac{4\pi}{2n+1}\overline{R}SMN \tag{1.6.6}$$

или

$$\int \frac{Y'_{n,s}d\sigma'}{D(a,1)} = \frac{4\pi}{2n+1}\overline{R}SY'_{n,s}, \tag{1.6.6$'$}$$

где $Y'_{n,s}$ являются сферическими гармониками. Если положить $\overline{\mu} = \cos\vartheta$, эти функции выражаются через присоединенные функции Лежандра $P_{n,k}$, которые, в свою очередь, зависят от многочленов Лежандра P_n. По определению имеем

$$P_n(\overline{\mu}) = \frac{1}{2,4\ldots 2n}\frac{d^n(\overline{\mu}^2-1)^n}{d\overline{\mu}^n} \tag{1.6.7}$$

и

$$P_{n,k}(\overline{\mu}) = (\sqrt{1-\overline{\mu}^2})\frac{d^kP_n(\overline{\mu})}{d\overline{\mu}^k}. \tag{1.6.8}$$

Тогда сферические гармоники n-го порядка определяются следующим образом:

$$\begin{aligned} &Y_{n,2k}: P_n(\overline{\mu}),\ P_{n,1}(\overline{\mu})\cos\psi,\ P_{n,2}(\overline{\mu})\cos 2\psi, \ldots,\ P_{n,n}(\overline{\mu})\cos n\psi,\\ &Y_{n,2k-1}: P_{n,1}(\overline{\mu})\sin\psi,\ P_{n,2}(\overline{\mu})\sin 2\psi, \ldots,\ P_{n,n}(\overline{\mu})\sin n\psi. \end{aligned} \tag{1.6.9}$$

Собственные значения в (1.6.6$'$) также можно выразить через функции Лежандра, т. е.

$$\overline{R}S = \frac{\sqrt{\varrho}}{\gamma_{n,s}}\int \frac{[P_{n,s}(\overline{\mu})\cos s\phi]^2}{\varrho+\overline{\mu}^2}\,d\sigma, \tag{1.6.10}$$

где

$$\gamma_{n,s} = \int [P_{n,s}(\overline{\mu})\cos s\phi]^2\,d\sigma, \tag{1.6.11}$$

а переменную ϱ мы определим позднее. Полную теорию функций Ламе и сферических гармоник можно найти, например, в четвертом томе трудов Аппеля [1].

Глава 2

Фигуры равновесия и метод обратной задачи

2.1. Основное уравнение

В этой главе будет представлено краткое описание классических исследований фигур небесных тел. Если предположить, что небесное тело изменяет свою форму, то проблема его движения становится в общем случае слишком сложной, поскольку в уравнении движения свободная поверхность рассматриваемого тела неизвестна, а в случае неоднородного тела также неизвестна и стратификация. Таким образом, движение будет создаваться переменными силами, зависящими от изменяющейся стратификации. Даже в простейшем случае, представляющем равновесие жидкой массы, которым можно объяснить фигуры многих небесных тел, эта задача свелась к решению функционального уравнения. Для решения уравнения такого типа понадобились новые, очень сложные методы, поэтому вполне понятно, почему первые решения были получены с помощью обратного метода. Кроме того, был предпринят ряд попыток определить, могут ли простейшие геометрические фигуры быть свободными поверхностями жидкой массы или нет. Оставалось лишь доказать, что такое предположение удовлетворит всем условиям задачи. Например, фигура равновесия жидкой массы в состоянии покоя определяется уравнением (1.1.9)

$$\int\limits_V \frac{\varkappa' dV'}{D} = \text{const}. \tag{2.1.1}$$

В этом функциональном уравнении, если жидкость неоднородна, пределы V неизвестны, равно как и плотность. Однако несложно увидеть, что, если *предположить, что фигурой однородной массы является* сфера или что стратификация представлена множеством концентрических сфер, причем на поверхности каждой из них плотность имеет постоянное значение, условия равновесия могут быть выполнены.

Для фигур равновесия вращающейся жидкой массы мы имеем уравнение (1.1.8)

$$\int\limits_V \frac{\varkappa' \, dV'}{D} + \frac{\omega^2 s^2}{2f} = \text{const} \tag{2.1.2}$$

или, в случае однородной массы,

$$\int\limits_V \frac{dV'}{D} + \frac{\omega^2 s^2}{2f\varkappa} = \text{const}. \tag{2.1.3}$$

Теперь мы видим, что этим условиям не удовлетворяет ни одна сфера. Однако в случае однородной жидкой массы среди возможных фигур равновесия могут оказаться эллипсоиды. Конечно, при использовании обратных методов мы вряд ли сможем определить, найдены ли все существующие решения. Как упоминалось ранее, точные доказательства того, что единственной возможной фигурой равновесия невращающейся жидкости является сфера, были представлены Ляпуновым и Карлеманом. Однако нам известно множество решений для вращающейся жидкости. Они представляют собой эллипсоиды, кольцеобразные фигуры, а также фигуры, мало отличающиеся от эллипсоидов, причем этот список, по-видимому, еще не окончателен.

2.2. Эллипсоиды Маклорена и Якоби

Базовые уравнения данной теории были представлены в разделе 1.4. Запишем уравнения (1.4.1)–(1.4.4) из этого раздела. Если выражение для потенциала однородного эллипсоида в точке $M(x, y, z)$,

$$fU = \text{const} - L_x \frac{x^2}{2} - L_y \frac{y^2}{2} - L_z \frac{z^2}{2}, \tag{2.2.1}$$

подставить в уравнение (1.1.8), условия для поверхности равного давления получаются в виде

$$(L_x - \omega^2)x^2 + (L_y - \omega^2)y^2 + L_z z^2 = C. \tag{2.2.2}$$

Более того, если поверхность эллипсоида вращения

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \tag{2.2.3}$$

отождествляется со свободной поверхностью жидкости

$$(L_x - \omega^2)(x^2 + y^2) + L_z z^2 = C, \tag{2.2.2$'$}$$

то условия, которым нужно удовлетворить, имеют вид $L_x = L_y$ и

$$a^2(L_x - \omega^2) = c^2 L_z = C. \tag{2.2.4}$$

Для получения остальных условий удобно ввести новую переменную l, определенную уравнением

$$a^2 = c^2(1 + l^2). \tag{2.2.5}$$

Тогда, согласно (2.2.4) и (2.2.5), мы получим

$$(1 + l^2)(L_x - \omega^2) = L_z. \tag{2.2.6}$$

Для эллипсоида вращения с осями $2a$ и $2c$ и постоянной плотностью $\varkappa$ коэффициенты $L_x = L_y = L$ и L_z в выражении потенциала (1.4.1) задаются формулами

$$\begin{aligned} L &= 2\pi f \varkappa a^2 c \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)^{1/2}}, \\ L_z &= 2\pi f \varkappa a^2 c \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)(c^2+\lambda)^{3/2}} \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

(см., например, Аппель [1, том IV, стр. 48]). Если вводится новая переменная (t), причем $\lambda = c^2 t$, то L и L_z можно выразить через элементарные функции, т. е.

$$\begin{aligned} L &= 2\pi f \varkappa (1 + l^2) \int\limits_0^\infty \frac{dt}{(1+l^2+t)^2\sqrt{1+t}} = \\ &= 2\pi f \varkappa \frac{1+l^2}{l^3}\left(\operatorname{tg}^{-1} l - \frac{l}{1+l^2}\right), \\ L_z &= 4\pi f \varkappa \frac{1+l^2}{l^3}(l - \operatorname{tg}^{-1} l). \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Масса эллипсоида также является функцией от переменной l:

$$m = \frac{4}{3}\pi \varkappa a^2 c = \frac{4}{3}\pi \varkappa c^3 (1 + l^2) = \frac{4\pi \varkappa a^3}{3\sqrt{1+l^2}}. \tag{2.2.9}$$

Если известны значения m, $\varkappa$ и l, из этого уравнения можно найти a, а из уравнения (2.2.5) другую ось эллипсоида. Записав (2.2.4) в виде

$$a^2 L - c^2 L = a^2 \omega^2 > 0$$

и подставляя (2.2.7), получаем

$$(a^2 - c^2) \int\limits_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{(a^2+\lambda)^2(c^2+\lambda)\sqrt{c^2+\lambda}} > 0.$$

Очевидно, что этот интеграл имеет положительное значение, в силу чего $a > c$. Таким образом, если эллипсоид является фигурой равновесия, он должен быть сплющен.

Теперь, если исключить L и L_z из уравнения (2.2.4), мы получим условие

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} = \frac{(3+l^2)\operatorname{tg}^{-1} l - 3l}{l^3} \equiv h(l), \qquad (2.2.10)$$

которому должна удовлетворять ω. Если дано значение l, соответствующее значение ω можно найти согласно уравнению (2.2.10). Из последнего уравнения (2.2.4) становится известна и постоянная C, определяющая значение потенциала на свободной поверхности. Отношение (2.2.10) можно представить графически. Подставляя $\operatorname{arctg} l = l - \frac{l^3}{3} + \ldots$, несложно показать, что кривая $h = h(l)$, которая начинается в точке O, достигнет некоторого максимального значения и будет асимптотически приближаться к оси l. Ряд других выводов, связанных с ω, приводился в первой главе.

В случае эллипсоидов Якоби, если предположить, что $c < b < a$, коэффициенты L_x, L_y и L_z будут определяться формулами (Аппель [1, стр. 54])

$$L_x = 2\pi f \varkappa abc \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(a^2+\lambda)G(\lambda)}, \quad L_y = 2\pi f \varkappa abc \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(b^2+\lambda)G(\lambda)},$$

$$L_z = 2\pi f \varkappa abc \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{(c^2+\lambda)G(\lambda)}, \quad G^2(\lambda) = (a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda). \qquad (2.2.11)$$

Вместо (2.2.3) и (2.2.4) мы теперь имеем

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad (2.2.12)$$

а также, согласно (2.2.2) и (2.2.12),

$$a^2(L_x - \omega^2) = b^2(L_y - \omega^2) = c^2 L_z = C. \qquad (2.2.13)$$

Следовательно,

$$\omega^2 = \frac{a^2 L_x - b^2 L_y}{a^2 - b^2} \qquad (2.2.14)$$

и

$$a^2 b^2 (L_x - L_y) + c^2 (a^2 - b^2) L_z = 0. \qquad (2.2.15)$$

Подставляя (2.2.11) в (2.2.14), получаем

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} = abc \int\limits_0^\infty \frac{\lambda\, d\lambda}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)G(\lambda)}, \qquad (2.2.16)$$

и, согласно (2.2.15),

$$(b^2 - a^2) \int\limits_0^\infty \left[\frac{a^2 b^2}{(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)} - \frac{c^2}{c^2+\lambda} \right] \frac{d\lambda}{G(\lambda)} = 0. \qquad (2.2.17)$$

Этому условию тождественно удовлетворяет равенство $b = a$. Если предположить, что $b \neq a$, то подстановка

$$\frac{c^2}{a^2} = s, \qquad \frac{c^2}{b^2} = t, \qquad \lambda = c^2 \tau$$

приведет к выражениям

$$\frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa} = st \int\limits_0^\infty \frac{\tau\, d\tau}{(1+s\tau)(1+t\tau)\Delta} = h(s,t), \qquad (2.2.18)$$
$$\Delta^2 = (1+s\tau)(1+t\tau)(1+\tau)$$

и

$$0 = (1 - s - t) \int\limits_0^\infty \frac{\tau\, d\tau}{\Delta^3} - st \int\limits_0^\infty \frac{\tau^2\, d\tau}{\Delta^3} = g(s,t). \qquad (2.2.19)$$

Переменные s и t имеют положительные значения по определению; то же можно сказать и об интегралах в последнем уравнении. Согласно (2.2.19), если заданный эллипсоид является фигурой равновесия, должно выполняться следующее неравенство: $s + t < 1$.

Через параметры s и t можно выразить также массу эллипсоида. Другими словами, мы имеем

$$m = \frac{4}{3}\pi \varkappa abc = \frac{4}{3}\pi \varkappa \frac{c^3}{\sqrt{st}} = \frac{4}{3}\pi \varkappa \frac{b^3 t}{\sqrt{s}} = \frac{4}{3}\pi \varkappa \frac{a^3 s}{\sqrt{t}}. \qquad (2.2.20)$$

Если известны масса, плотность и значения параметров s и t, мы можем найти все оси и соответствующую угловую скорость, однако всегда следует учитывать, что по уравнению (2.2.19) s является функцией от t. Уравнения (2.2.18) и (2.2.19) представляют собой кривую в пространстве переменных s, t, h, а уравнение $g(s,t) = 0$ является ее проекцией на плоскость st. Полное исследование этих условий имеется во втором томе Тиссерана [1] или в четвертом томе Аппеля [1], (стр. 61–69). Функция $h = h(s,t)$ достигает своего максимального значения h_0 при $s = t = t_0 = 0{,}3396$, а соответствующий эллипсоид принадлежит к ряду эллипсоидов Маклорена. Этот максимум $h_0 = 0{,}1871$ является предельным значением (1.4.9), определяющим точку пересечения двух кривых, представляющих множества эллипсоидов Якоби и Маклорена.

2.3. Неоднородные фигуры

Первые исследования Клеро, связанные с фигурами равновесия неоднородной массы, упоминались в разделе 1.4. Долгое время единственной основой теории неоднородных фигур равновесия служили его знаменитое уравнение, выражающее связь между средней плотностью слоя и его эллиптичностью, и некоторые родственные теоремы. Однако для получения этих результатов мы начнем с более общих предположений, касающихся стратификации массы. Рассмотрим вывод, предложенный Вавром [1].

Если уравнения (1.1.3) записать в виде

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial x} = X + \omega^2 x, \qquad \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial y} = Y + \omega^2 y, \qquad \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial x} = Z, \tag{2.3.1}$$

получится, что сила тяжести, т. е. результирующая притяжения и центробежной силы, направлена по нормали к поверхности равного давления $p(x,y,z) = \text{const}$. В случае, когда $\varkappa = \varphi(p)$, три множества поверхностей $p = \text{const}$, $\varkappa = \text{const}$ и поверхности уровня совпадают, как и было показано ранее.

Рассмотрим этот случай, обозначив гравитационный потенциал через

$$W = \int \frac{dp}{\varkappa} + \text{const} = W(\varkappa). \tag{2.3.2}$$

Стратификация обыкновенно принимается соответствующей распределению плотности, причем $\varkappa$ можно выразить через параметр, называемый $\widehat{a}$. Его мы определим позже.

Тогда гравитационный потенциал, а также сила тяжести g становятся функциями этого параметра: $W(\widehat{a})$ и $g(\widehat{a})$ соответственно. Очевидно, что координаты вектора $\mathbf{g}$ задаются вторыми членами уравнения (2.3.1) или уравнениями

$$g_x = g\alpha = \frac{\partial W}{\partial x}, \quad g_y = g\beta = \frac{\partial W}{\partial y}, \quad g_z = g\gamma = \frac{\partial W}{\partial z}, \tag{2.3.3}$$

где α, β, γ являются угловыми коэффициентами внутренней нормали поверхности $W = \text{const}$. Если элемент этой нормали обозначить через dn, получится, что

$$\frac{dg}{dn} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dn} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dn} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{dz}{dn} = \mathbf{n} \cdot \Delta g, \tag{2.3.4}$$

и при дифференцировании (2.3.3) мы получим

$$\nabla^2 W = \frac{dg}{dn} + g\left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{\partial \beta}{\partial y} + \frac{\partial \gamma}{\partial z}\right). \tag{2.3.5}$$

Выражение в скобках является $\operatorname{div}\mathbf{n}$, если $\mathbf{n}$ — единичный вектор в направлении нормали:

$$\operatorname{div}\mathbf{n} = -K, \tag{2.3.6}$$

где значение K равно удвоенной средней кривизне поверхности $W = \text{const}$. Таким образом,

$$\nabla^2 W = \frac{dg}{dn} - Kg, \tag{2.3.7}$$

и согласно (1.1.5) мы имеем

$$\nabla^2 W = \nabla^2 fU + \nabla^2 \frac{\omega^2 s^2}{2}.$$

Поскольку потенциал fU удовлетворяет уравнению Пуассона, мы получаем уравнение Брунса [1]:

$$\frac{dg}{dn} - Kg = -4\pi f \varkappa + 2\omega^2. \tag{2.3.8}$$

Это точное уравнение, дающее значение одной из входящих в него величин, если известны все остальные. Из уравнений (2.3.3)–(2.3.8) следует, что отношение (2.3.8) не зависит ни от какой гипотезы о связи трех вышеупомянутых поверхностей. Из (2.3.8) можно сделать ряд других выводов. Предположим, что dn и $d\widehat{a}$ одновременно положительны, т. е. теперь мы изменяем направление dn (ранее положительное) и обращаем его внутрь,

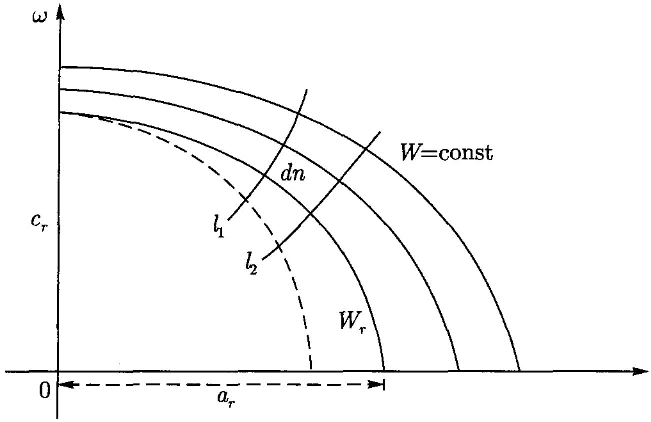


Рис. 1

положив $dn/d\widehat{a} = N$. В таком случае

$$-gN = W' = \frac{dW}{d\widehat{a}}, \tag{2.3.9}$$

где g — производная W по нормали. На поверхности $W = \mathrm{const}$ выражение (2.3.9) не меняется, в силу чего можно записать

$$(gN)_1 = (gN)_2. \tag{2.3.10}$$

Ясно, что это равенство справедливо, когда соответствующие точки M_1 и M_2 смещаются по силовым линиям l_1 и l_2 соответственно (рис. 1). Дифференцируя (2.3.10), получаем

$$\left(\frac{dg}{d\widehat{a}} + g\frac{dN}{d\widehat{a}}\right)_1 = \left(\frac{dg}{d\widehat{a}} + g\frac{dN}{d\widehat{a}}\right)_2, \tag{2.3.11}$$

а из (2.3.8) и (2.3.9)

$$\frac{dg}{d\widehat{a}} = KW' + (-4\pi f\varkappa + 2\omega^2)N. \tag{2.3.12}$$

Подставляя (2.3.12) в (2.3.11), имеем

$$(4\pi f\varkappa - 2\omega^2)(N_2^2 - N_1^2) =$$
$$= W'\left[\left(KN + \frac{1}{N}\frac{dN}{d\widehat{a}}\right)_1 - \left(KN + \frac{1}{N}\frac{dN}{d\widehat{a}}\right)_2\right]. \tag{2.3.13}$$

Еще Вавр показал, что это уравнение можно подвергнуть дальнейшим полезным преобразованиям, однако мы ограничимся лишь данной формулой. Что касается формы поверхностей равной плотности, пока что мы не делаем никаких предположений. Еще Вольтерра [2], показал, что для бесконечного числа слоев (а в случае конечного множества таких слоев это сделал Ами в 1887 году) эти поверхности не могут совпадать с множеством гомотетических эллипсоидов. Утверждение Вольтерра имеет место, когда плотность является интегрируемой функцией. Тем не менее эллипсоиды используются как поверхности, по крайней мере приблизительно представляющие стратификацию. Некоторые выводы, извлеченные из этого предположения, обсуждаются в следующем разделе.

2.4. Уравнение Клеро и некоторые теоремы

Итак, мы полагаем, что (a) $W = \mathrm{const}$ — это замкнутые поверхности, каждая из которых заключает в себе все предыдущие поверхности из данного множества, (b) они имеют общий центр, и (c) все они являются поверхностями вращения. К поверхности $W_r = \mathrm{const}$ применимо уравнение (2.3.13). Полярным и экваториальным «радиусами» этой поверхности являются $c_r(\widehat{a})$ и $a_r(\widehat{a})$ соответственно. Средняя кривизна на уровне полюса составляет $K_P(\widehat{a})$, а на экваторе — $K_E(\widehat{a})$. Обозначим через $g_P(\widehat{a})$ силу тяжести в точке полюса P_r. Тогда (2.3.13) запишется в виде

$$(4\pi f\varkappa - 2\omega^2)\left[\left(\frac{da_r}{d\widehat{a}}\right)^2 - \left(\frac{dc_r}{d\widehat{a}}\right)^2\right] =$$
$$= -g_P\frac{dc_r}{d\widehat{a}}\left[K_P\frac{dc_r}{d\widehat{a}} + \left(\frac{d\widehat{a}}{dc_r}\right)\frac{d^2c_r}{d\widehat{a}^2} - K_E\frac{da_r}{d\widehat{a}} - \left(\frac{d\widehat{a}}{da_r}\right)\frac{d^2a_r}{d\widehat{a}^2}\right]. \quad (2.4.1)$$

В соответствии с допущением Клеро стратификация определяется множеством концентрических эллипсоидов, а параметр $\widehat{a}$ представляет их полярные полуоси. Тогда соответствующие значения кривизны приблизительно равны

$$K_E = \frac{2}{\widehat{a}}, \quad K_P = \frac{2}{\widehat{a}}\left(1 - 2\frac{\delta}{\widehat{a}}\right),$$

где величина $\delta = a_r - c_r$ мала для эллипсоидов, лишь незначительно отличающихся от сферы. Если пренебречь членами порядка δ^2, уравнение (2.4.1) примет вид

$$\frac{4\pi f\varkappa - 2\omega^2}{g_P}\delta' = \frac{\delta'}{\widehat{a}} + \frac{2}{\widehat{a}^2}\delta = \frac{\delta''}{2}. \quad (2.4.2)$$

Более того, при малом значении ω^2 величины δ, δ' и δ'' тоже малы, и тогда произведением $\omega^2\delta'$ можно пренебречь, а среднюю плотность $\varkappa_a$ во внутренней области $W_r = \text{const}$, равно как и силу тяжести, можно вычислить приблизительно, допуская сферическое распределение масс. Таким образом, мы получим

$$m_r = 4\pi \int_0^r \varkappa r^2 dr = \frac{4\pi}{3} r^3 \varkappa_r, \quad r = c_r.$$

Из этого уравнения следует, что

$$3c_r^2 \varkappa_r + c_r^3 \varkappa_r' = 3c_r^2 \varkappa$$

и

$$\frac{3}{c_r} + \frac{\varkappa_r'}{\varkappa_r} = \frac{4\pi f \varkappa}{g_P}, \tag{2.4.3}$$

так как знаменатель во втором слагаемом $\frac{4}{3}\pi f c_r \varkappa_r$ представляет собой силу тяжести на поверхности сферы. Таким образом, поскольку $c_r = \widehat{a}$, с помощью (2.4.2) и (2.4.3) получаем

$$\frac{2}{\widehat{a}} + \frac{\varkappa_r'}{\varkappa_r} = \frac{2}{\widehat{a}^2}\frac{\delta}{\delta'} - \frac{1}{2}\frac{\delta''}{\delta'}. \tag{2.4.4}$$

В качестве новой переменной можно ввести эллиптичность $e = \delta/\widehat{a}^2$. Тогда уравнение Клеро примет вид

$$e''\varkappa_r + \frac{6}{\widehat{a}}e'\varkappa_r + 2e'\varkappa_r' + \frac{2}{\widehat{a}}e\varkappa_r' = 0. \tag{2.4.5}$$

Нам известно, что теорему Клеро можно доказать для силы тяжести на полюсе. Эта теорема выражается условиями

$$\frac{4}{5}e \leqslant \frac{\omega^2\widehat{a}}{g} \leqslant 2e, \quad \frac{1}{2}\frac{\omega^2\widehat{a}}{g} \leqslant e \leqslant \frac{5}{4}\frac{\omega^2\widehat{a}}{g}. \tag{2.4.6}$$

Также можно доказать и два следующих соотношения, причем второе играет крайне важную роль в решении прикладных задач. Оно имеет вид

$$e + \frac{g_{\text{экв.}} - g_{\text{полюс}}}{g} = \frac{5}{2}\frac{\omega^2\widehat{a}}{g}, \tag{2.4.7}$$

где g — сила тяжести в точке, расположенной на некоторой географической широте на поверхности планеты.

Все эти результаты получаются для тех стратификаций, которые были приняты в данном разделе. Упомянем и еще одно классическое соотношение, известное как уравнение Даламбера:

$$C - A = \frac{2}{3}\frac{g}{f}\widehat{a}^4\left(e - \frac{1}{2}\frac{\omega^2\widehat{a}}{g}\right), \tag{2.4.8}$$

где A и C — моменты инерции планеты относительно экваториального и полярного диаметров соответственно.

Как упоминалось ранее, когда проблема фигуры неоднородной планеты сводится к форме, данной Клеро, считается, что поверхности уровня представляют собой концентрические эллипсоиды, а распределение плотностей принимается известным. Тогда вся задача сводится к определению изменения эллиптичности в направлении от свободной поверхности к центру. Мы уже упоминали о совсем ином подходе к проблеме фигуры Земли, который предпринял Брунс [1]. Ниже мы приводим базовые определения и предположения его теории. Поверхности уровня представляют собой множество поверхностей, перпендикулярных силе тяжести в каждой точке Земли. Из-за вращения эти поверхности определяются функцией $W = fU + Q$, т. е. уравнением $W(x, y, z) = \text{const}$. Тогда сила тяжести удовлетворяет уравнению (2.3.8). Заметим, что при некоторых допущениях о массе Земли, которые, судя по всему, близки к истинному положению вещей, Пицетти [1] доказал, что поверхности уровня образуют линейное множество замкнутых поверхностей, причем каждая последующая содержит в себе все предыдущие. Данный факт мы рассмотрели в самом начале этого раздела в виде предположения. Дальнейшее исследование поверхностей уровня методами теории потенциала осуществлялось в непосредственной связи с геодезическими данными (см., например, Хопфнер [1]).

Мы ограничимся тем, что приведем лишь некоторые выводы, сделанные Брунсом. Ни одну поверхность уровня невозможно достаточно точно описать единственной аналитической поверхностью простой формы. Что касается фигуры Земли, в первую очередь следует рассмотреть уровенный сфероид

$$\widehat{W} = \text{const} = W_0 = d\frac{Y_0}{r} + \frac{Y_2}{r^3} + \frac{\omega^2 s^2}{2f}.$$

Он лишь немногим отличается от эллипсоида вращения. Тогда следующим приближением является геоид $W = \widehat{W} + W_1 = W_0$. Следовательно, в точке геоида слагаемое $\widehat{W}$ не должно равняться W_0. Выражение для W_1 представляет собой сумму всех слагаемых высшего порядка в разложении по сферическим гармоническим функциям потенциала притяжения. Если через ζ

обозначить расстояние между этими двумя фигурами, измеренное по нормали геоида, можно доказать, что оно определяется уравнением

$$\zeta = -\frac{W_1}{\overline{g}\cos\varepsilon},$$

где $\overline{g}$ — сила тяжести на уровенном сфероиде, а ε — угол между двумя нормалями. Это и есть теорема Брунса. Общеизвестная задача Стокса состоит в определении деформации, которую выражает геоид, при использовании видимых отличий в силе тяжести $g - \overline{g}$.

2.5. Эллипсоид Дирихле, исследования Римана и др.

В качестве последнего примера классического рассмотрения теории фигур небесных тел рассмотрим эллипсоид Дирихле. Предположив, что в начальный момент времени однородная жидкая масса имеет форму эллипсоида

$$\frac{\widehat{x}^2}{a^2} + \frac{\widehat{y}^2}{b^2} + \frac{\widehat{z}^2}{c^2} = 1, \tag{2.5.1}$$

Дирихле рассмотрел движение, определенное условием, что координаты некоторого элемента x, y, z являются линейными функциями от $\widehat{x}$, $\widehat{y}$, $\widehat{z}$:

$$x = l\widehat{x} + m\widehat{y} + n\widehat{z}, \quad y = \ldots, \quad z = \ldots, \tag{2.5.2}$$

где l, m, n — функции времени. Естественно, эти частицы подвергаются взаимному притяжению. Давление на поверхности жидкости в общем случае может являться функцией времени $P(t)$. Подставляя выражения (2.5.2) в уравнение (2.5.1), мы видим, что внешняя поверхность жидкости является переменным эллипсоидом, концентрическим эллипсоиду (2.5.1), а уравнениям движения удовлетворяет давление

$$p = P(t) + \sigma(t)\left[1 - \frac{\widehat{x}^2}{a^2} - \frac{\widehat{y}^2}{b^2} - \frac{\widehat{z}^2}{c^2}\right]. \tag{2.5.3}$$

Это движение жидкости можно разложить на две составляющие: первой будет твердотельное вращение вокруг оси, проходящей через центр, а второй — движение частиц относительно вращающейся системы отсчета $O\xi\eta\zeta$. Относительные скорости должны быть пропорциональны новым координатам ξ, η, ζ:

$$v_\xi = \lambda_1\xi, \quad v_\eta = \lambda_2\eta, \quad v_\zeta = \lambda_3\zeta. \tag{2.5.4}$$

Для частного случая, когда вращение отсутствует, Дирихле получил изохронные колебания, при которых форма жидкости изменяется от удлиненного до сплющенного эллипсоида, в некоторый промежуточный момент принимая форму сферы. Если начальная скорость не равна нулю и не удовлетворяет некоторому особому условию, соответствующий эллипсоид становится неограниченно сплющенным или вытянутым.

Если начальная скорость ниже некоторого предельного значения, то угловая скорость вращающейся жидкости может изменяться между двумя пределами. Однако для бóльшего значения угловой скорости вытянутого эллипсоида нужно обеспечить достаточно большое внешнее давление. Существование эллипсоидов Маклорена и Якоби Дирихле доказал как частный случай своей теории. Кроме того, очень интересный результат из исследования Дирихле получил Дедекинд. Каждый эллипсоид Якоби сохранит свою форму и *положение*, если внутренние движения частиц заданы уравнениями

$$x = \widehat{x}\cos\omega t + \widehat{y}\frac{a}{b}\sin\omega t, \quad y = -\widehat{x}\frac{b}{a}\sin\omega t + \widehat{y}\cos\omega t, \quad z = \widehat{z}. \qquad (2.5.5)$$

Тогда постоянная ω является угловой скоростью соответствующего эллипсоида Якоби (2.1.18). Следовательно, каждая частица описывает эллипс, уравнение которого дано в параметрическом виде (2.5.5).

Неоконченное исследование Дирихле усовершенствовал Риман [1], который также внес некоторые изменения в данную проблему. Он изучил характерные изменения осей эллипсоида и относительное движение жидкости вокруг них, исключив из уравнений движения начальный момент. Тогда можно доказать, что существует всего четыре частных случая, известных из предыдущих исследований, в которых главные оси эллипсоидов не меняются. Что касается небольших колебаний, можно говорить о двух типах изменений, отличающихся устойчивостью. По Риману, если возмущенная поверхность эллипсоида Маклорена остается эллипсоидом вращения, равновесие считается устойчивым.

Если круговой экватор превращается в эллипс, а полярная ось остается неизменной, то о неустойчивости можно говорить в том случае, когда эксцентриситет превышает некоторое предельное значение.

Впоследствии задачу об изменяющемся однородном жидком эллипсоиде исследовали Бриоши, Липшиц, Гринхилл, Бассет, Тедон, Лав, Стеклов и Харгривс (см., например, Г. Ламб «Гидродинамика», стр. 722).

Глава 3
Метод Пуанкаре

3.1. Основные функции

В своем знаменитом научном труде [1] Пуанкаре предложил новый метод решения задачи о фигурах равновесия вращающейся жидкой массы. Этот метод дает решения, которые также представляют фигуры нового вида, обыкновенно называемые «фигурами Пуанкаре». Как упоминалось ранее, в ряду эллипсоидов Маклорена имеется эллипсоид, соответствующий так называемой точке ветвления, с которой начинается ряд эллипсоидов Якоби. Тогда возникает вопрос о том, существуют ли другие точки ветвления такого рода. Пуанкаре ответил утвердительно. Необходимо отметить, что годом раньше Пуанкаре те же фигуры равновесия открыл Ляпунов. Однако в своей первой работе он не решился настаивать на факте их существования. Тем не менее эти фигуры было бы логичнее назвать «фигурами равновесия Ляпунова–Пуанкаре», приняв во внимание также и то, что впоследствии их первый исследователь использовал самые точные методы для решения ряда задач, связанных как с этими, так и с другими фигурами равновесия.

В этой главе мы рассмотрим метод Пуанкаре. Важную роль в нем играют «основные функции», связанные с некоторой замкнутой поверхностью S. В настоящее время они называются собственными функциями, но терминология теории интегральных уравнений была введена в исследованиях Лихтенштейна, о которых мы поговорим позже.

Чтобы определить, каким условиям должны удовлетворять основные функции, нам понадобятся общеизвестные свойства поверхностного потенциала, создаваемого ньютоновской силой тяжести или кулоновскими электрическими силами. Суть в том, что сам этот потенциал на поверхности S непрерывен, а вот его нормальная производная имеет разрыв.

Определим множество функций U_k, обладающих следующими свойствами:

а) значение $U_k^{(i)}$ в пространстве τ_i, ограниченном поверхностью S, является гармонической функцией

$$\Delta U_k^{(i)} = 0; \tag{3.1.1}$$

b) значение $U_k^{(e)}$ функции U_k в пространстве τ_e, внешнем по отношению к S, также удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U_k^{(e)} = 0 \tag{3.1.2}$$

и является регулярным в бесконечности, т. е. имеет порядок $O(1/r)$;

c) на поверхности S

$$U_k^{(i)} = U_k^{(e)}, \tag{3.1.3}$$

и если $\mathbf{n}$ — это единичный вектор нормали, то

$$\left(\operatorname{grad} U_k^{(i)} + h_k \operatorname{grad} U_k^{(e)}\right)\cdot\mathbf{n} = \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial n} + h_k \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial n} = 0, \tag{3.1.4}$$

где h_k, $k = 1, 2, 3, \ldots$ — множество положительных чисел. Для установления этих чисел необходимы определенные условия. Предположим, что эти условия имеют вид

$$J^{(i)} = \int\limits_{\tau_i} (\operatorname{grad} U^{(i)})^2 \, d\tau \text{ — минимум}, \tag{3.1.5}$$

$$J^{(e)} = \int\limits_{\tau_e} (\operatorname{grad} U^{(e)})^2 \, d\tau = 1. \tag{3.1.6}$$

Тогда из уравнений (3.1.3), (3.1.6) и теоремы Грина получаем

$$J^{(i)} = \int\limits_S U^{(i)} \frac{\partial U^{(i)}}{\partial n} \, dS, \quad J^{(e)} = -\int\limits_S U^{(e)} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial n} \, dS = -\int\limits_S U^{(i)} \frac{\partial U^{(e)}}{\partial n} \, dS = 1.$$

Если положить $U_0^{(i)} = \text{const}$, то, согласно (3.1.5), $J_0^{(i)} = 0$. Это минимум, поскольку $J^{(i)} \geqq 0$. Теперь предположим, что $h_0 = 0$. Тогда в общем случае, согласно (3.1.4),

$$\int\limits_S U_k^{(i)} \left(\frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial n} + h_k \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial n} \right) dS = J_k^{(i)} + h_k(-J_k^{(e)}) = 0,$$

откуда

$$J_k^{(i)} = h_k. \tag{3.1.7}$$

Функции U_k, удовлетворяющие всем только что предложенным условиям, называются основными. Условия (3.1.7) и (3.1.6) также можно записать в виде

$$\int\limits_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial n}\, dS = h_k, \quad \int\limits_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial n}\, dS = -1. \tag{3.1.8}$$

Аналогично для функций с разными индексами:

$$\int\limits_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_m^{(i)}}{\partial n}\, dS = 0, \quad \int\limits_S U_k^{(i)} \frac{\partial U_m^{(e)}}{\partial n}\, dS = 0, \quad k \neq m. \tag{3.1.9}$$

Такие функции в случае сферы дают сферические гармоники, а в случае эллипсоида — функции Ламе.

Пуанкаре (см. также исследования Стеклова) доказал, что в общем случае, если функция Φ определена на поверхности S, при некоторых условиях ее можно представить в виде ряда основных функций

$$\Phi = \sum_{k=1}^{\infty} A_k U_k^{(i)}. \tag{3.1.10}$$

Чтобы найти коэффициент A_k, умножим это уравнение на

$$\frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial n}\, dS$$

и выполним интегрирование по поверхности S. Тогда из (3.1.8) и (3.1.9) получим

$$A_k = -\int\limits_S \Phi \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial n}\, dS. \tag{3.1.11}$$

Этот общий результат нашел применение в теории фигур равновесия, близких к эллипсоидам.

Рассмотрим некоторые свойства функций Ламе. Предположим, что ϱ, μ и ν — эллиптические координаты, а $R(\varrho^2)$, $S(\varrho^2)$, $M(\mu^2)$ и $N(\nu^2)$ — функции Ламе. Как известно, эллиптические координаты соответствуют трем конфокальным поверхностям, проходящим через данную точку $P(x, y, z)$. Уравнение поверхности второго порядка ($c < b < a$)

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 0 \tag{3.1.12}$$

представляет эллипсоиды, если $\lambda = \varrho^2$, а $\lambda^2 - a^2 > 0$. Оно определяет конфокальные однополостные гиперболоиды при $\lambda^2 = \mu^2$ и $\lambda^2 - a^2 < 0$ и конфокальные двуполостные гиперболоиды при $\lambda^2 - b^2 > 0$ и $b^2 > \lambda^2 = \nu^2 > c^2$.

Трем заданным значениям ϱ, μ и ν соответствует восемь точек в пространстве. Предположим, что $f(\varrho^2)$ — это многочлен, а $n = 2k$ — его степень. Существует четыре класса функций Ламе:

$$R = f(\varrho^2), \tag{3.1.13}$$

$$R = \sqrt{\varrho^2 - a^2} f(\varrho^2), \quad \sqrt{\varrho^2 - b^2} f(\varrho^2), \quad \sqrt{\varrho^2 - c^2} f(\varrho^2), \tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned} R = {} & \sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - b^2)} f(\varrho^2), \\ & \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} f(\varrho^2), \quad \sqrt{(\varrho^2 - c^2)(\varrho^2 - a^2)} f(\varrho^2), \end{aligned} \tag{3.1.15}$$

$$R = \sqrt{(\varrho^2 - a^2)(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} f(\varrho^2). \tag{3.1.16}$$

Функции M и N представлены аналогичными выражениями, где вместо ϱ^2 подставляются μ^2 или ν^2; так, согласно (3.1.13) мы имеем $M = f(\mu^2)$ и $N = f(\nu^2)$.

Выражения типа MN и RMN называются произведениями Ламе. Они являются решениями уравнения Лапласа. Второе частное решение уравнения

$$\frac{d^2R}{du^2} = [n(n+1)\wp u + h]R, \tag{3.1.17}$$

где $\wp u$ — функция Вейерштрасса, обозначают через S, и оно носит название функции Ламе второго рода. Постоянная h в уравнении (3.1.17) определяется условием, что решения всегда относятся к типу, рассмотренному выше. Функция S также должна удовлетворять условию

$$R\frac{dS}{du} - S\frac{dR}{du} = 2n + 1, \quad S = R\int_0^u \frac{2n+1}{R^2} du. \tag{3.1.18}$$

Более подробно функции Ламе описаны в четвертом томе, первой части, четвертой главе труда Аппеля [1][1]. Приведем здесь лишь несколько частных решений и значений произведений Ламе. Эти частные решения имеют следующий вид:

$$n = 0, \qquad R_0 = 1, \tag{3.1.13$'$}$$

$$n = 1, \qquad R_1 = \sqrt{\varrho^2 - a^2}, \quad R_2 = \sqrt{\varrho^2 - b^2}, \quad R_3 = \sqrt{\varrho^2 - c^2}, \tag{3.1.14$'$}$$

[1]Шестая глава русского издания. — *Прим. ред.*

$$n=2,\quad R_4=R_2R_3,\quad R_5=R_3R_1,\quad R_6=R_1R_2,$$
$$R_7=\varrho^2-[g+\frac{1}{6}\sqrt{3g^2}],\quad R_8=\varrho^2-[g-\frac{1}{6}\sqrt{3g^2}],\tag{3.1.15'}$$

если функцию Вейерштрасса записать в виде

$$\wp u=s,\quad \int\limits_{\infty}^{s}\frac{ds}{\sqrt{4s^2-g_2s-g_3}}=u$$

и положить

$$3g_2=h^2,\quad Kg+H=h,\quad K=n(n+1),$$
$$\varrho^2=\wp u+g,$$

где H — постоянная, которая получается при преобразовании уравнения (3.1.17). Действительно, при использовании переменной ϱ это уравнение принимает вид

$$\frac{A}{R}\frac{d}{d\varrho}\left(A\frac{dR}{d\varrho}\right)=K\varrho^2+H,\tag{3.1.17'}$$

где

$$A^2=\frac{(\varrho^2-a^2)(\varrho^2-b^2)(\varrho^2-c^2)}{\varrho^2}.$$

При $n=1$ мы имеем три функции Ламе и три произведения, которые, если обозначить произвольную постоянную через C, имеют вид

$$RMN=Cx,Cy,Cz.\tag{3.1.19}$$

При $n=2$ мы имеем пять функций R, а следовательно, и пять произведений Ламе. Три из них имеют вид

$$RMN=Cxy,Cyz,Czx.\tag{3.1.20}$$

При $n=3$ мы имеем семь произведений Ламе. Согласно (3.1.16), одно из этих выражений имеет вид

$$RMN=Cxyz.\tag{3.1.21}$$

Позже мы используем новую переменную l. Она определяется как производная переменной u, введенной в уравнении (3.1.17), вдоль внешней нормали:

$$\frac{du}{dn_e}=-l,\quad l^2=\frac{1}{(\mu^2-\varrho^2)(\nu^2-\varrho^2)}.\tag{3.1.22}$$

Рассмотрим эллипсоид E_0, который соответствует некоторому определенному значению $\varrho = \varrho_0$, и пусть U_0 — гармоническая функция, заданная на этом эллипсоиде. Согласно Пуанкаре, можно положить, что

$$U_0 = \sum_{k=0}^{\infty} A_k M_k N_k. \tag{3.1.23}$$

Обозначив индексом 0 значение функции при $\varrho = \varrho_0$, мы берем

$$A_k = \alpha_k R_k^{(0)} S_k^{(0)}. \tag{3.1.24}$$

Тогда функция

$$U_i = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k S_k^{(0)} M_k N_k \tag{3.1.25}$$

будет гармонической функцией во внутренней области E_0, имеющей на этом эллипсоиде значение U_0. С другой стороны,

$$U_e = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k R_k^{(0)} S_k M_k N_k \tag{3.1.26}$$

является гармонической функцией в пространстве, внешнем по отношению к E_0, а $U_e = U_0$ на E_0.

Предположим, что

$$U_k^{(i)} = \alpha_k S_k^{(0)} R_k M_k N_k, \quad U_k^{(e)} = \alpha_k R_k^{(0)} S_k M_k N_k. \tag{3.1.27}$$

Очевидно, что эти функции удовлетворяют условию $U_k^{(i)} = U_k^{(e)}$ на E_0. Кроме того,

$$\frac{\partial U_k^{(i)}}{\partial n} + h_k \frac{\partial U_k^{(e)}}{\partial n} = 0, \tag{3.1.28}$$

если положить, что

$$h_k = -S_k^{(0)} \left(\frac{\partial R_k}{\partial \varrho}\right)_0 \Big/ R_k^{(0)} \left(\frac{\partial S_k}{\partial \varrho}\right)_0. \tag{3.1.29}$$

Таким образом, U_k являются основными функциями для E_0, что вытекает из свойств функций Ламе.

3.2. Фигуры равновесия, близкие к эллипсоидальным

Найдем потенциал однородного эллипсоидального слоя в терминах функций Ламе. Предположим, что его изменяющаяся толщина равна ζ, а постоянная плотность — $\varkappa = 1$. Тогда элемент массы $\zeta\, d\sigma$ можно понимать как произведение $d\sigma$ на плотность поверхности ζ. В таком случае мы имеем общеизвестное условие разрывности силы на простом слое,

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_i} + \frac{\partial U_e}{\partial n_e} = -4\pi\zeta. \tag{3.2.1}$$

Принимая во внимание выражения (3.1.25) и (3.1.26) для функций U_i и U_e, их нормальные производные можно записать в виде

$$\frac{\partial U_i}{\partial n_i} = \frac{\partial U_i}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n_i} = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^{(0)} \frac{dR_k}{du} M_k N_k \frac{\partial u}{\partial n_i} = \sum_0^\infty \alpha_0 l_0 S_k^{(0)} \frac{dR_k}{du} M_k N_k,$$

$$\frac{\partial U_e}{\partial n_e} = \frac{\partial U_e}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial n_e} = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^{(0)} \frac{dS_k}{du} M_k N_k \frac{\partial u}{\partial n_e} = -\sum_0^\infty \alpha_k l_0 R_k^{(0)} \frac{dS_k}{du} M_k N_k,$$

где l_0 — значение l в точке $\varrho = \varrho_0$, а u — параметр, вводимый в дифференциальном уравнении Ламе (3.1.17).

Таким образом, в соответствии с (3.2.1) из выражений для нормальных производных U_i и U_e мы получаем, что

$$-4\pi\zeta = \sum_0^\infty \alpha_k l_0 M_k N_k \left[S_k \frac{dR_k}{du} - R_k \frac{dS_k}{du} \right]_{\rho=\rho_0}. \tag{3.2.2}$$

Согласно (3.1.18) мы имеем

$$\zeta = l_0 \sum_0^\infty \frac{2n+1}{4\pi} \alpha_k M_k N_k = l_0 \sum_0^\infty \beta_k M_k N_k, \tag{3.2.3}$$

где

$$\beta_k = \frac{2n+1}{4\pi}\alpha_k. \tag{3.2.4}$$

Если

$$\widehat{U} = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^{(0)} S_k^{(0)} M_k N_k \tag{3.2.5}$$

является заданной функцией, то коэффициенты α_k известны. Тогда мы также имеем β_k и можем вычислить коэффициенты произведений Ламе в (3.2.3), равно как и наоборот.

Связь между эллиптическими и декартовыми координатами выражается следующим образом:

$$x = h_1 R_1 M_1 N_1, \quad y = h_2 R_2 M_2 N_2, \quad z = h_3 R_3 M_3 N_3, \tag{3.2.6}$$

где

$$\begin{aligned} h_1^2 = \frac{1}{(a^2-b^2)(a^2-c^2)}, \quad h_2^2 &= \frac{1}{(b^2-a^2)(b^2-c^2)}, \\ h_3^2 &= \frac{1}{(c^2-a^2)(c^2-b^2)}. \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Объем эллипсоида также можно выразить через функции R_i. Он равен

$$V = \frac{4\pi}{3} R_1 R_2 R_3 = \frac{4\pi}{3} R_1 R_4 = \frac{4\pi}{3} R_2 R_5 = \frac{4\pi}{3} R_3 R_6. \tag{3.2.8}$$

Направляющие косинусы нормали к эллипсоиду E могут быть выражены следующим образом:

$$\begin{aligned} \cos(nx) = \frac{dx}{dn} = h_1 l M_1 N_1 R_4, \quad \cos(ny) &= h_2 l M_2 N_2 R_5, \\ \cos(nz) &= h_3 l M_3 N_3 R_6. \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Если U_E — потенциал заданного эллипсоида E, а U' — потенциал некоторого слоя этого эллипсоида толщиной ζ, сумма $U_E + U'$ будет являться потенциалом деформированного эллипсоида. В случае несжимаемой жидкости толщина этого слоя будет ограничиваться условием

$$\int_S \zeta \, d\sigma = 0. \tag{3.2.10}$$

Чтобы выразить потенциал эллипсоида через функции Ламе, Пуанкаре сначала вывел следующие формулы для случая смещения эллипсоида в направлении x (и аналогичным образом для других направлений). Согласно (3.2.9),

$$\zeta = \varepsilon \cos(nx) = \varepsilon h_1 l_0 R_4^0 M_1 N_1.$$

Если толщина этого слоя сводится к одному члену в уравнении (3.2.3), то его потенциал также представлен единственным членом ($n = 1$) —

$$\frac{4\pi}{3} \varepsilon h_1 R_1^{(0)} S_1^{(0)} R_4^{(0)} M_1 N_1 = U'. \tag{3.2.11}$$

Очевидно, что изменение потенциала эллипсоида, обусловленное смещением ε, равно

$$U_{E_2} - U_{E_1} = U' = -\varepsilon \frac{\partial U_E}{\partial x}, \tag{3.2.12}$$

поскольку во втором положении та же частица имеет координату $x - \varepsilon$ относительно точки P, где рассматривается значение потенциала. Согласно уравнениям (3.2.11), (3.2.12) и (3.2.6) первое из уравнений (3.2.13) получить совсем несложно, а другие два вытекают из аналогичных соображений, связанных со смещениями в направлении y или z. Тогда для составляющих силы, являющихся производными от потенциала, во внутреннем пространстве имеем

$$\begin{gathered}\frac{\partial U_E}{\partial x} = -\frac{4\pi}{3} R_4^{(0)} S_1^{(0)} x = -V \frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}} x,\\ \frac{\partial U_E}{\partial y} = -V \frac{S_2^{(0)}}{R_2^{(0)}} y, \qquad \frac{\partial U_E}{\partial z} = -V \frac{S_3^{(0)}}{R_3^{(0)}} z.\end{gathered} \tag{3.2.13}$$

Теперь понятно, что в любой точке внутренней области эллипсоида потенциал равен

$$U_{E_i} = -\frac{V}{2} \left(\frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}} x^2 + \frac{S_2^{(0)}}{R_2^{(0)}} y^2 + \frac{S_3^{(0)}}{R_3^{(0)}} z^2 \right). \tag{3.2.14}$$

Для внешних точек можно показать, что

$$\frac{\partial U_E}{\partial x} = -V \frac{S_1}{R_1} x, \qquad \frac{\partial U_E}{\partial y} = -V \frac{S_2}{R_2} y, \qquad \frac{\partial U_E}{\partial z} = -V \frac{S_3}{R_3} z. \tag{3.2.15}$$

Теперь, учитывая, что из-за обозначений, использованных в данном разделе, ось x соответствует малой оси эллипсоида, в силу чего в уравнении (1.1.8) оси x и z можно поменять местами, запишем $s^2 = y^2 + z^2$ и подставим в это уравнение вместо потенциала выражение (3.2.14). Тогда, положив $f = 1$, получим

$$-V \left(\frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}} \right) x^2 + \left(\omega^2 - V \frac{S_2^{(0)}}{R_2^{(0)}} \right) y^2 + \left(\omega^2 - V \frac{S_3^{(0)}}{R_3^{(0)}} \right) z^2 - \mathrm{const} = 0. \tag{3.2.16}$$

Уравнение эллипсоида $E_0(\varrho = \varrho_0)$ также можно записать в виде

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{R_1^{(0)2}} + \frac{y^2}{R_2^{(0)2}} + \frac{z^2}{R_3^{(0)2}} - 1 = 0 \tag{3.2.17}$$

Тогда, согласно (3.2.3)–(3.2.5), мы получаем

$$U'^{(0)} = \sum_{1}^{\infty} \alpha_k S_k^{(0)} R_k^{(0)} M_k N_k, \quad \alpha_k = \frac{4\pi}{2n+1}\beta_k. \tag{3.2.25}$$

Значение гравитационного ускорения в точке полюса ($y = 0, z = 0$) согласно (3.2.22), (3.2.14) и (3.2.17) равно

$$g = V\frac{S_1^{(0)}}{R_1^{(0)}}x = VS_1^{(0)} \tag{3.2.26}$$

и

$$l_0 g = \frac{VS_1^{(0)}}{R_2^{(0)}R_3^{(0)}} = \frac{4\pi}{3}R_1^{(0)}S_1^{(0)}. \tag{3.2.26$'$}$$

Если уравнения (3.2.24), (3.2.25) и (3.2.26′) подставить в (3.2.23), это условие примет вид

$$\sum_{1}^{\infty} 4\pi\beta_k \left(\frac{S_k R_k}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3}\right) M_k N_k = \text{const}. \tag{3.2.27}$$

В этом приближении величина g считается постоянной. В уравнении (3.2.27) произведения $M_k N_k$ являются переменными, но это уравнение должно удовлетворяться для каждой точки, т. е. для каждой пары координат μ и ν. Следовательно,

$$\beta_k \left(\frac{S_k R_k}{2n+1} - \frac{S_1 R_1}{3}\right) = 0 \quad k = 1, 2, 3, \ldots, \text{const} = 0. \tag{3.2.28}$$

Вышеперечисленные условия являются базовыми в теории Пуанкаре. Без множителей β_k они также приводились в первой статье Ляпунова. Множители β_k являются коэффициентами в ряду, представляющем функцию ζ (3.2.24). Из-за (3.2.28) они могут отличаться от нуля только в случае обращения в ноль соответствующего второго множителя. Принимая этот факт во внимание, мы имеем: a) при $n = 1$ и $k = 1$ коэффициент β_1 может отличаться от нуля, поскольку второй коэффициент в (3.2.28) тождественно обращается в нуль. Этот случай не представляет ни малейшего интереса, поскольку значение β_1 выражает всего лишь смещение всего эллипсоида в направлении x. b) В двух случаях, при $n = 1$ и $k = 2$ или $k = 3$, коэффициенты β_k должны обращаться в нуль из-за (3.2.18) и (3.2.19).

с) При $n = 2$ и $k = 4$ коэффициент β_4 может отличаться от нуля, поскольку условие (3.2.20) справедливо для эллипсоидов Якоби, но и этот случай нельзя назвать важным, поскольку значение β_4 *выражает всего лишь вращение* эллипсоида. Таким образом, появления новых фигур можно ожидать при $k = 5$ или бóльших значениях данного параметра. Чтобы получить ответ на вопрос, существуют ли эти новые фигуры равновесия, Пуанкаре изучил более общее выражение

$$F = \frac{R_k S_k}{2n+1} - \frac{R_i S_i}{2p+1}, \tag{3.2.29}$$

где $i \neq k$, а p может равняться n, тогда как функция

$$F_1 = \frac{F}{R_k^2} = \frac{1}{2n+1}\frac{S_k}{R_k} - \frac{1}{2p+1}\frac{S_i}{R_i}\left(\frac{R_i}{R_k}\right)^2. \tag{3.2.30}$$

Эта функция зависит от параметра ϱ^2, изменяющегося в интервале (∞, a^2), так что вся задача сводится к задаче о существовании нулей функции F_1. Детальное изучение функции (3.2.30) показывает, что при $n = 2$ и $k = 5, 6$ или 7 $i = p = 1$ нулей у этой функции нет, а следовательно, нет и новых фигур равновесия. При $k = 8$ мы имеем точку ветвления для эллипсоидов Маклорена и Якоби.

Первые новые фигуры равновесия получаются при $n = 3$ и $n = 4$. В общем случае, чтобы найти такие новые фигуры, т. е. ненулевые коэффициенты β_k и, соответственно, $\zeta \neq 0$, нужно использовать функции Ламе нового рода. Эти функции можно записать в виде

$$f(\varrho^2), \quad \sqrt{\varrho^2 - b^2} f(\varrho^2), \quad \sqrt{\varrho^2 - c^2} f(\varrho^2), \quad \sqrt{(\varrho^2 - b^2)(\varrho^2 - c^2)} f(\varrho^2), \tag{3.2.31}$$

где $f(\varrho^2)$ — целая рациональная функция степени k. Ее нули (α, α_i) расположены в промежутке между точками c^2 и a^2. Предположим, что α является наибольшим корнем. Тогда можно положить

$$f(\varrho^2) = (\varrho^2 - \alpha)(\varrho^2 - \alpha_1)\ldots(\varrho^2 - \alpha_{k-1}). \tag{3.2.32}$$

Число n может равняться $2k$ или $2k + 1$. Мы запишем только уравнения для двух фигур низшего порядка.

При $n = 3$ мы имеем функцию $R_k = \sqrt{\varrho^2 - c^2)}(\varrho^2 - \alpha)$, где $c^2 < \alpha < b^2$. Таким образом, можно записать выражение

$$\zeta = \beta_k l_0 M_k N_k = l_0 \varepsilon R_k M_k N_k.$$

Коэффициент ε равен $\beta_k/R_k^{(0)}$, а $R_k^{(0)}$ имеет постоянное значение на эллипсоиде $\varrho = \varrho_0$. Выражения M_k и N_k получаются, если в R_k вместо ϱ подставить μ и ν. Тогда

$$\zeta = l_0\varepsilon\sqrt{(\varrho^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(\nu^2 - c^2)}(\varrho^2 - \alpha)(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha).$$

Согласно (3.2.6) этот квадратный корень пропорционален z, и

$$(\varrho^2 - \alpha)(\mu^2 - \alpha)(\nu^2 - \alpha) = C\left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1\right),$$

причем из-за (3.1.12) оба выражения имеют одинаковые корни. Таким образом, уравнение новой фигуры равновесия принимает вид

$$\frac{\zeta}{l_0} = \varepsilon' z\left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1\right), \tag{3.2.33}$$

где $\varepsilon' = \mathrm{const}$. Это так называемая овальная или грушевидная фигура.

При $n = 4$ мы полагаем $R_k = f(\varrho^2) = (\varrho^2 - \alpha_1)(\varrho^2 - \alpha_2)$, где $c^2 < \alpha_2$, $\alpha_1 < b^2$. Теперь

$$\zeta = l_0\varepsilon(\varrho^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_1)(\nu^2 - \alpha_1)(\mu^2 - \alpha_2)(\nu^2 - \alpha_2),$$

и это уравнение нужно записать в виде

$$\begin{aligned}\frac{\zeta}{l_0} = \varepsilon' &\left(\frac{x^2}{\alpha_1 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_1 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_1 - c^2} - 1\right)\\ &\left(\frac{x^2}{\alpha_2 - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_2 - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_2 - c^2} - 1\right).\end{aligned} \tag{3.2.34}$$

Постоянная ε' может быть либо положительной, либо отрицательной, в силу чего это уравнение определяет две новые фигуры.

Эти примеры и общий анализ показывают, что в общем случае в выражении ζ присутствует столько же коэффициентов вида

$$E_i \equiv \frac{x^2}{\alpha_i - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_i - b^2} + \frac{z^2}{\alpha_i - c^2} - 1,$$

сколько нулей имеет функция R_k. Таким образом, в общем случае мы имеем

$$\begin{aligned}\zeta &= l_0\varepsilon' E_1 E_2 \ldots E_k \qquad \text{при } n = 2k,\\ \zeta &= l_0 z\varepsilon' E_1 E_2 \ldots E_k \qquad \text{при } n = 2k + 1.\end{aligned} \tag{3.2.35}$$

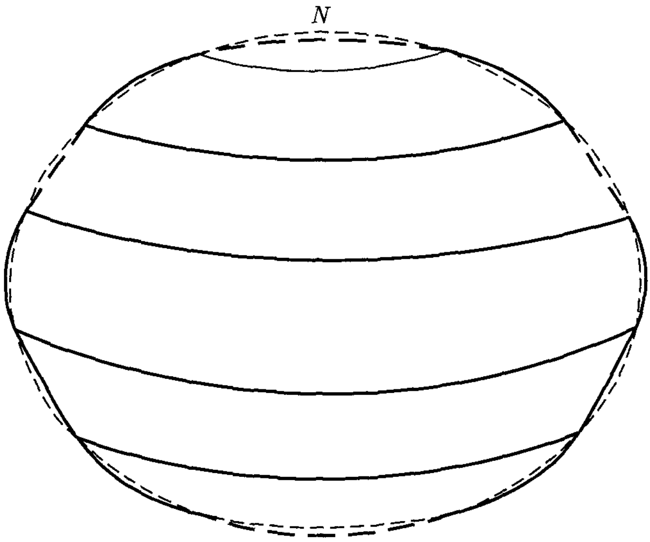


Рис. 2

Обсуждаемые здесь условия справедливы для эллипсоидов Якоби. Условия существования новых фигур равновесия, лишь немного отличающихся от эллипсоидов Маклорена, принимают иной вид. Для начала мы должны взять $n + k \equiv 0 \pmod 2$, т. е. n и k должны быть либо четными, либо нечетными одновременно. Полагая

$$\frac{z}{y} = \operatorname{tg}\psi, \qquad \sqrt{\frac{a^2 - \mu^2}{a^2 - c^2}} = \cos\vartheta = \overline{\mu}, \tag{3.2.36}$$

мы можем использовать тот факт, что в случае эллипсоидов вращения произведения Ламе $M_k N_k$ определяют сферические гармоники. Взяв эти функции в виде (1.6.9), можно записать

$$\zeta = l_0(\beta_k P_{n,k}(\overline{\mu}) \cos k\psi + \beta_{k'} P_{n,k}(\overline{\mu}) \sin k\psi). \tag{3.2.37}$$

Если положить $\beta_{k'} = \beta_k \operatorname{tg}\overline{\omega}$, это уравнение примет вид

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{\beta_k}{\cos\overline{\omega}} P_{n,k}(\overline{\mu}) \cos(k\psi - \overline{\omega}). \tag{3.2.38}$$

Несложно увидеть, что оси координат можно повернуть, чтобы получить угол $\overline{\omega} = 0$. Тогда уравнение (3.2.38) примет вид

$$\zeta = l_0 \beta_k P_{n,k}(\overline{\mu}) \cos k\psi, \tag{3.2.39}$$

и при $0 < k < n$ оно определит множество новых фигур равновесия, лишь немного отличающихся от эллипсоидов Маклорена.

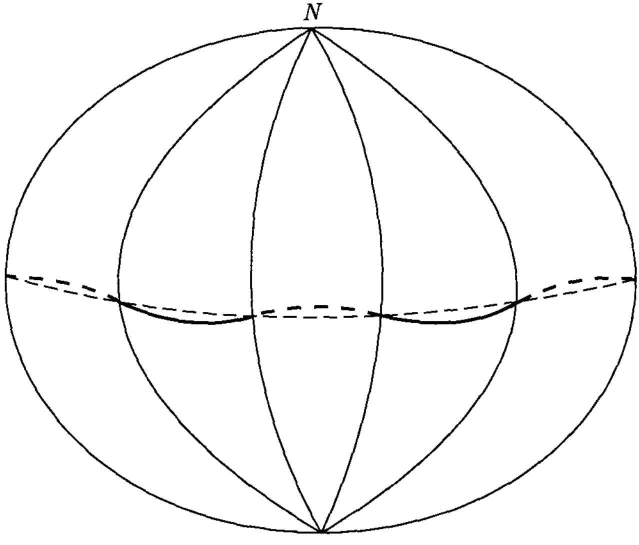


Рис. 3

В двух крайних случаях при $k = 0$ и $k = n$ мы имеем

$$\zeta = l_0 \beta_0 P_n(\overline{\mu}), \quad P_n = \frac{1}{2.4\ldots 2n} \frac{d^2(\overline{\mu}^2 - 1)^n}{d\overline{\mu}^n} \tag{3.2.40}$$

и

$$\zeta = l_0 \beta_n P_{n,n}(\overline{\mu}) \cos n\psi, \quad P_{n,n} = (1 - \overline{\mu}^2)^{n/2} \frac{d^n P_n}{d\overline{\mu}^n}. \tag{3.2.41}$$

Уравнение (3.2.40) представляет «зональную» фигуру равновесия. Функция ζ не обращается в нуль тождественно ни на экваторе, ни в полюсах. Типичная фигура этого вида изображена на рис. 2. Уравнение (3.2.41) дает так называемые секториальные фигуры: ζ обращается в нуль в полюсах и вдоль множества меридианов (рис. 3). При $0 < k < n$ мы получаем сеть меридианов и параллелей, разделяющих поверхность эллипсоида на ячейки, где ζ поочередно принимает то положительные, то отрицательные значения.

3.3. Устойчивость фигур равновесия

Поскольку теория фигур равновесия также имела своей целью объяснить эволюцию небесных тел, возникла необходимость определения устойчивости различных фигур. Однако этот вопрос является одним из наиболее сложных во всей теории. Порой, как это произошло в случае грушевидной фигуры, он требует проведения очень сложного анализа и достижения высочайшей точности в используемых понятиях и критериях.

Согласно общему анализу равновесия, проведенному Томсоном и Тэтом [1], мы можем говорить о силах трех типов. Прежде всего, это привычные для всех силы типа универсального притяжения, которые зависят исключительно от координат частиц. Они образуют консервативную систему. Далее, если жидкая масса находится в состоянии равновесия, то соответствующие уравнения будут одинаковы как для идеальной, так и для вязкой жидкости. Однако если вязкая масса считается деформированной, то новое состояние, отличное (возможно, совсем немного) от равновесия, в общем случае породит силы второго типа, которые зависят от скоростей, типа трения. В этом случае система является диссипативной. Для большинства рассматриваемых фигур равновесие определяется относительно системы движущихся осей, так что третий тип сил представлен центробежной силой и силой Кориолиса. Эти силы Томсон и Тэт назвали гироскопическими. Основные утверждения, обусловленные введением в условия равновесия нового типа сил, приводятся ниже.

Неустойчивое равновесие, созданное одними только консервативными силами, при определенных условиях может переходить в устойчивое, если в игру вступят также и гироскопические силы.

Тот вид равновесия, который существует под действием одних только консервативных сил, не изменится даже при введении сил двух других типов.

Если равновесие устойчиво под действием сил всех трех типов, исключение как диссипативных, так и гироскопических сил не повлияет на тип равновесия; аналогичным образом будет сохраняться и неустойчивость.

Эти выводы следуют из уравнений движения системы частиц, записанных, например, в лагранжевой форме, а также из основного условия

$$\frac{d}{dt}(T - U) = -f < 0. \tag{3.3.1}$$

В этом условии $2T$, как обычно, выражает кинетическую энергию системы, U — потенциал консервативных сил, т. е. $F = \operatorname{grad} U$, а $2f = b_{11}q_1^2 + \ldots + b_{nn}q_n^2$, где коэффициенты b_{11} в диссипативной функции неотрицательны. Условие (3.3.1) показывает, что если функция f отлична от нуля, полная энергия материальной системы рассеивается.

Если в выражении для f присутствуют все координаты, значит диссипативные силы являются *полными*. Согласно лорду Кельвину, устойчивость является *вековой*, если она возникает под действием полных диссипативных сил. Если же действуют неполные диссипативные силы, то речь идет о *вре́менной* устойчивости. Для дальнейшего развития этой теории, некоторые критерии устойчивости были введены в математическом виде.

Всем известно, что если уравнения движения материальной системы записать в лагранжевой форме:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial q_i'}\right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = -\frac{\partial U}{\partial q_i}, \tag{3.3.2}$$

то положения равновесия получаются из уравнений

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n. \tag{3.3.3}$$

В ходе классических исследований было доказано, что необходимым и достаточным условием устойчивого равновесия является максимальное значение потенциала U. Конечно, предположение о том, что результаты, доказанные для дискретной материальной системы, справедливы также и для непрерывного тела, возникло относительно недавно. Будучи сделанным в рамках теории фигур равновесия жидких масс, это предположение дает нам возможность сделать из уравнения (1.1.8) один важный вывод.

$$\int\limits_V \frac{\varkappa'\,dV'}{D} + \frac{\omega^2 s^2}{2f} = \text{const}. \tag{3.3.4}$$

Если выражение, представляющее левый член уравнения, умножить на $f\varkappa dV$ и проинтегрировать по всему объему жидкости, получится

$$W + \frac{1}{2}I\omega^2 = f\int \varkappa\,dV \int \frac{\varkappa'\,dV'}{D} + \frac{\omega^2}{2}\int s^2\varkappa\,dV, \tag{3.3.5}$$

где W — энергия системы, обусловленная притяжением, а I — момент инерции относительно оси вращения. Несложно увидеть, что в случае равновесия это выражение постоянно, в силу чего его производные по координатам равны нулю. В общем случае при последующих малых движениях при деформации фигуры равновесия участвуют силы всех трех типов. Тогда критерий устойчивости лорда Кельвина заключается в том, что сумма

$$W + \frac{1}{2} I\omega^2 \tag{3.3.6}$$

максимальна.

Считается, что в этом выражении угловая скорость имеет заданное значение. Однако существует ряд случаев, в которых деформация фигуры равновесия обусловливается отнюдь не действием диссипативных сил. В качестве примера такого явления Пуанкаре назвал равномерное сжатие. По его мнению, в таком случае логичнее предположить постоянство полного момента, нежели положить $\omega = \text{const}$. Так как момент импульса определяется как $\widehat{M} = I\omega$, Пуанкаре доказал справедливость еще одного критерия устойчивости. Это новое необходимое и достаточное условие устойчивости равновесия состоит в том, что

$$W - \frac{M^2}{2I} \tag{3.3.7}$$

является максимумом. Это условие невозможно вывести из (3.3.6).

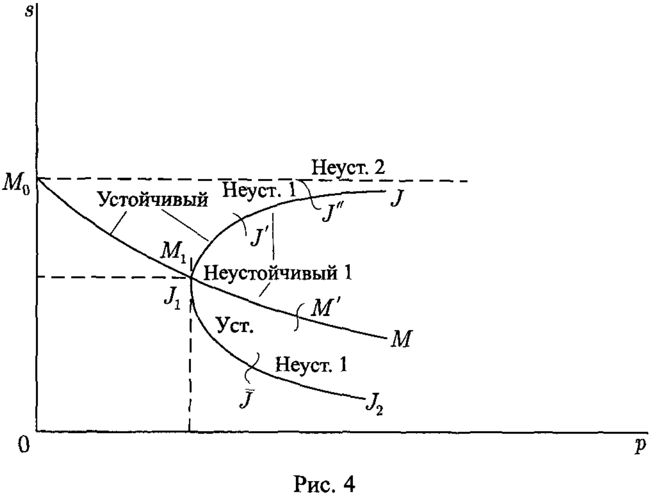


Рис. 4

Теперь в качестве изменяющегося параметра можно выбрать либо ω, либо M, либо какую-то другую величину. Тогда мы получим непрерывное множество фигур равновесия, которые зависят от этого параметра. Все детали такого представления рассмотрены в труде Аппеля [1]. Мы же воспроизведем лишь диаграмму, соответствующую распределению устойчивых и неустойчивых фигур равновесия. На этой диаграмме (рис. 4) используется параметр p, пропорциональный моменту импульса жидкой массы, и $s = c^2/a^2$, где c и a – полуоси. Тогда множество эллипсоидов Маклорена представлено линией M_0M_1M. Она берет начало в точке M_0, соответствующей сфере, и на ветви M_0M_1 мы имеем устойчивые эллипсоиды Маклорена. Они утрачивают свою устойчивость при значениях параметров, дающих часть M_1M. В точке ветвления M_1 устойчивость переходит к эллипсоидам Якоби, множество которых представлено линией JJ_1J_2. Как упоминалось в разделе (2.3), новые фигуры равновесия, лишь немного отличающиеся от эллипсоидов, определяются нулями выражений (2.3.29) или (2.3.30). Следовательно, следующие точки ветвления на каждой из линий M_0M_1M или JJ_1J_2 будут определяться корнями уравнений

$$\frac{R_kS_k}{2n+1} - \frac{R_1S_1}{3} = 0 \tag{3.3.8}$$

и

$$R_2 - R_3 \quad \text{или} \quad \frac{R_4S_4}{5} - \frac{R_1S_1}{3} = 0, \tag{3.3.9}$$

причем первое справедливо для M_1M, а второе – для JJ_1J_2.

В каждой точке ветвления при движении от первой точки (M_1) степень неустойчивости эллипсоидов, принадлежащих к одному и тому же множеству, растет. Очевидно, что все эти соображения очень и очень интересны, особенно с позиций теоретической механики, но не могут использоваться без ограничений, когда речь идет об эволюции фигур планет или звезд, поскольку попытка рассмотрения небесных тел в качестве однородных масс является чрезмерным упрощением.

3.4. Овальная фигура равновесия

Одна из фигур равновесия однородной жидкой массы, совсем немного отличающаяся от эллипсоида, привлекла особое внимание исследователей. Она задается уравнением (3.2.33)

$$\frac{\zeta}{l_0} = \varepsilon' z\left(\frac{x^2}{\alpha - a^2} + \frac{y^2}{\alpha - b^2} + \frac{z^2}{\alpha - c^2} - 1\right), \tag{3.4.1}$$

и называется грушевидной, или овальной, фигурой. Если

$$\frac{x^2}{\widehat{a}^2} + \frac{y^2}{\widehat{b}^2} + \frac{z^2}{\widehat{c}^2} = 1 \tag{3.4.2}$$

является критическим эллипсоидом Якоби, при деформации которого можно получить овальную фигуру, а $\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}$ — это координаты произвольной точки на этой поверхности, то можно записать

$$\zeta^2 = (\widetilde{x} - x)^2 + (\widetilde{y} - y)^2 + (\widetilde{z} - z)^2. \tag{3.4.3}$$

Если $(x/\widehat{a}^2)/l_0, \ldots$ — это косинусы углов, которые нормаль к эллипсоиду (3.4.2) образует с осями координат, то

$$\widetilde{x} = x + \frac{x}{\widehat{a}^2} l_0 \zeta, \quad \widetilde{y} = y + \frac{y}{\widehat{b}^2} l_0 \zeta, \quad \widetilde{z} = z + \frac{z}{\widehat{c}^2} l_0 \zeta. \tag{3.4.4}$$

Пересечение поверхности (3.4.1) с эллипсоидом Якоби изображено на рис. 5. П. Гумберт [1] заметил, что меридианы овальной фигуры не имеют точек перегиба.

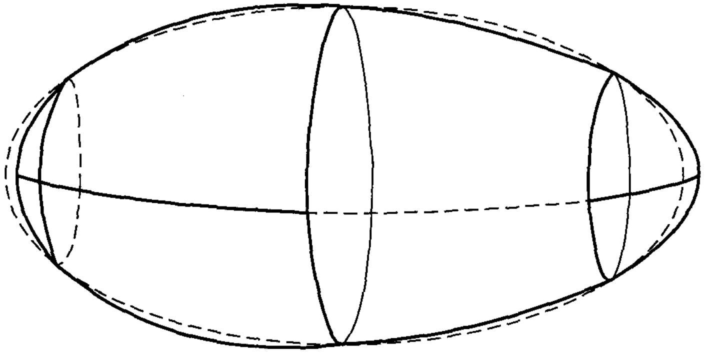


Рис. 5

Таким образом, эта фигура больше походит на яйцо, нежели на грушу. Представление, данное Пуанкаре [2], основывалось на первом приближении, в результате чего появилось название «грушевидная». Из-за этого представления был выдвинут ряд соображений насчет деления небесной массы. В теории образования Луны, созданной Дарвином ([3, 4, стр. 317]), возможность такого процесса связывалась с вопросом устойчивости грушевидной фигуры. Если бы фигура такой формы была устойчива, можно было бы ожидать, что в процессе эволюции произойдет сжатие в области узкого пояса, и фигура разделится на две. Однако первые исследования Ляпунова показали, что овальная фигура неустойчива, а потому отделение Луны от Земли не следует объяснять фактом существования такой фигуры. Долгое время вопрос об устойчивости овальной фигуры считался открытым (см., Аппель [1]). Создав совершенно новый подход, Джинс [1, 3] подтвердил вывод Ляпунова.

Совсем недавно при обсуждении вопроса устойчивости Литтлтон [1] поправил ряд других утверждений Джинса насчет деления вращающейся жидкой массы. Он пришел к заключению, что процесс деления в том виде, в каком Джинс применил его для объяснения происхождения двойных звезд, тоже невозможен.

3.5. Некоторые другие фигуры равновесия

Чтобы объяснить существование кольца Сатурна и форму некоторых туманностей, были исследованы кольцеобразные фигуры равновесия. Критический анализ результатов, относящихся к фигурам такого рода, был представлен Пуанкаре [2]. Хотя начало исследованию кольцеобразной фигуры равновесия жидкой массы положил Лаплас, точное доказательство существования такой фигуры значительно позднее предложила Софья Ковалевская [1]. Однако, как показали исследования Лапласа, Максвелла и Пуанкаре, ни гипотеза о жидком, ни гипотеза о твердом кольце не способны объяснить кольцо Сатурна. Мы уже говорили о том, что всем требованиям наблюдений и теории удовлетворяет только гипотеза Кассини (согласно которой кольцо Сатурна состоит из маленьких твердых частиц).

В двумерной задаче были получены некоторые другие фигуры равновесия. Этими фигурами, исследованными в 1859 году Матиссеном, Джинсом [1] и Глоба-Михайленко [1][2], являются бесконечные цилиндры с эллиптическим сечением. Ляпунов отнес подобные задачи к математическим курьезам.

---

[2]Перевод первой части данной работы приведен в приложениии В. — *Прим. ред.*

Глава 4
Метод Ляпунова

4.1. Потенциал тела, в котором стратификация лишь немного отличается от эллипсоидальной

Решение задачи о фигурах равновесия жидкой массы зависит от разложения в ряд потенциала этой массы. Как упоминалось ранее, теорию Клеро нельзя распространить дальше первого приближения. Хотя методы Лапласа и Лежандра формальным образом обеспечивали любое желаемое приближение, вопрос о сходимости рассматриваемого ряда оставался открытым. В его исследовании ни Пуассон, ни Калландро не смогли добиться ощутимого успеха. Даже степень точности, которой можно было добиться по методу Пуанкаре (см. третью главу), как отметил Ляпунов, не была удовлетворительной. Тогда Ляпунов в ряде своих работ разработал новый метод подхода к этой задаче. Потратив более тридцати лет на исследования этой области, окончательный вид этого метода Ляпунов представил в своей последней работе [9], опубликованной в 1925 году, через семь лет после трагической гибели ее автора. Этот вид данного метода, применимого как к однородному, так и к неоднородному телу, здесь мы будем называть методом Ляпунова.

Следует отметить, что сделанные выводы не ограничиваются допущением о том, что отклонения от эллипсоидальной структуры, которые мы будем принимать во внимание, бесконечно малы. Они также могут иметь конечные значения, так что и в этом отношении метод Ляпунова превосходит все прочие.

Теперь, чтобы записать выражение для потенциала тела, стратификация которого лишь немного отличается от задаваемой набором поверхностей эллипсоидов, мы будем пользоваться, в основном, обозначениями Ляпунова. Предположим, что $E(\sqrt{\varrho+1}, \sqrt{\varrho+q}, \sqrt{\varrho})$ — это эллипсоид, принадлежащий либо множеству эллипсоидов Маклорена ($q = 1$), либо множеству эллипсоидов Якоби ($q < 1$). Тогда $E_a(a\sqrt{\varrho+1}, a\sqrt{\varrho+q}, a\sqrt{\varrho})$ представляет набор эллипсоидов, подобных и концентрических эллипсоиду E.

Предположим, что в заданном теле B поверхности равной плотности совсем незначительно отличаются от эллипсоидов E_a и плотность возрастает от центра тела к его свободной поверхности. Предположим также, что плотность изменяется незначительно, и закон плотностей задан в виде

$$\varkappa = 1 + \delta\varphi(a), \tag{4.1.1}$$

где φ — заданная функция параметра a. Этот параметр будет определять поверхности равной плотности ($\varkappa = \text{const}$); δ является вторым параметром, имеющим малые значения. Случай однородного тела получается из формул, которые следуют, если положить $\delta = 0$ и $\varkappa = \text{const}$. Очевидно, что параметр a можно истолковать по-разному. Мы предположим, что a определяется условием, что объем пространства, ограниченного поверхностью уровня $a = a_k$, равен объему эллипсоида E_{a_k}. В центре тела $a = 0$, а на свободной поверхности F тела B $a = 1$.

Если $\varphi(0)$ равна нулю, плотность в центре равна $\varkappa_0 = 1$, т. е. значению, принятому Эмденом [1] для стандартного решения. Форму (4.1.1) Ляпунов выбрал для того, чтобы облегчить практическое применение разложения в ряд, которое было получено для однородного эллипсоида в задаче о неоднородной массе, что мы увидим позднее (уравнение (4.3.4)). Однако в общем случае разумно предположить, что

$$\varkappa = \varphi(a, \delta), \tag{4.1.1$'$}$$

и при разложении этой функции в степенной ряд относительно параметра δ мы получим

$$\varkappa = 1 + \sum \delta^k \varphi_k(a). \tag{4.1.1$''$}$$

Результаты исследования Ляпунова несложно обобщить для этого закона плотностей, просто прибавив члены в виде суммы

$$\sum_{k=2}^{\infty} \delta^k \varphi_k(a).$$

Теперь, по Ляпунову, поверхности уровня F_a можно представить уравнениями

$$\begin{aligned} x &= a(1+\zeta)\sqrt{\varrho + 1}\sin\vartheta\cos\psi,\\ y &= a(1+\zeta)\sqrt{\varrho + q}\sin\vartheta\sin\psi,\\ z &= a(1+\zeta)\sqrt{\varrho}\cos\vartheta, \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

где ϑ и ψ — сферические координаты. Согласно только что сделанным предположениям функция ζ должна иметь малые значения. В общем случае формулы (4.1.2) определят положение любой точки в пространстве при $0 \leqslant a \leqslant \infty$, $0 \leqslant \vartheta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \psi \leqslant 2\pi$. Каждой функции $\zeta(a, \vartheta, \psi)$ соответствует множество поверхностей F_a. На свободной поверхности F имеем

$$\zeta(1, \vartheta, \psi) = \overline{\zeta}(\vartheta, \psi) = \overline{\zeta}. \tag{4.1.3}$$

Если предположить, что каждой паре значений углов ϑ и ψ соответствует единственное значение ζ, и что существует дифференциальный коэффициент $\partial\zeta/\partial a$, то уравнения (4.1.2) дают следующее выражение для элемента объема:

$$dV = a^2\sqrt{\varrho(\varrho+q)(\varrho+1)}(1+\zeta)^2\left(1+\frac{\partial a\zeta}{\partial a}\right)\sin\vartheta\, da\, d\vartheta\, d\psi. \tag{4.1.4}$$

Положим

$$\Delta = \sqrt{\varrho(\varrho+q)(\varrho+1)}, \qquad d\sigma = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\psi. \tag{4.1.5}$$

Поскольку по определению параметра a объемы E_a и F_a должны быть равны, мы имеем

$$\Delta\int\limits_0^a a^2 da\int(1+\zeta)^2\left(1+\frac{\partial a\zeta}{\partial a}\right)d\sigma =$$
$$= \frac{\Delta}{3}a^3\int(1+\zeta)^3 d\sigma = \frac{4}{3}\pi a^3\sqrt{\varrho(\varrho+q)(\varrho+1)}.$$

Согласно (4.1.5) из этого уравнения следует, что $\int(1+\zeta)^3 d\sigma = 4\pi$, в силу чего мы получаем первое условие для функции ζ в виде

$$\int\zeta\, d\sigma = -\int\zeta^2\, d\sigma - \frac{1}{3}\int\zeta^3\, d\sigma. \tag{4.1.6}$$

Предположим, что fU — это потенциал в точке $M(x, y, z)$. В точке $M'(x', y', z')$ мы имеем

$$U = \int\frac{\varkappa' dV'}{D},$$

где $D = MM'$. При подстановке (4.1.4) и (4.1.5) получаем

$$U = \Delta\int\limits_0^1 \varkappa' a'^2 da'\int\frac{(1+\zeta')^2\left(1+\frac{\partial a'\zeta'}{\partial a'}\right)d\sigma'}{D}. \tag{4.1.7}$$

Чтобы решить задачу, этот потенциал придется разложить в ряд. Тогда функция ζ должна соответствовать некоторым условиям. Сначала Ляпунов предположил, что эту функцию можно разложить в степенной ряд по параметру δ. Мы увидим, что в ряде других задач можно использовать и некоторые другие параметры. Предположим, что $l(\delta)$ и $g(\delta)$ — две переменные, которые не зависят от a, a', ϑ, ϑ', ψ, ψ' и обращаются в ноль при $\delta = 0$. Положим

$$(D)_{\zeta=\zeta'=0} = D_0. \tag{4.1.8}$$

Тогда два других условия для ζ, введенные Ляпуновым, имеют вид

$$|\zeta| < l, \qquad \frac{\sqrt{\varrho+1}(a+a')}{2}\frac{|\zeta-\zeta'|}{D_0} < g. \tag{4.1.9}$$

Поскольку ζ не является заданной функцией, существование двух таких переменных l и g необходимо доказать, что и сделал Ляпунов после формального вычисления ζ.

Для дальнейших преобразований удобно принять новую переменную ξ вместо ζ', положив

$$\frac{\zeta'-\zeta}{1+\zeta} = \xi. \tag{4.1.10}$$

Следовательно,

$$\frac{1+\zeta'}{1+\zeta} = 1+\xi \quad (1+\zeta)^{-1}\left(1+\frac{\partial a'\zeta'}{\partial a'}\right) = 1+\frac{\partial a'\xi}{\partial a'}. \tag{4.1.11}$$

Согласно (4.1.2) получаем

$$\begin{aligned} D &= \sqrt{(x-x')^2+\ldots} = \\ &= \sqrt{(\varrho+1)[a(1+\zeta)A - a'(1+\zeta')A']^2+\ldots} = \\ &= (1+\zeta)\sqrt{(\varrho+1)[aA-a'(1+\xi)A']^2+(\varrho+q)[\ldots]^2+\varrho[\ldots]^2}, \end{aligned} \tag{4.1.12}$$

где $A = \sin\vartheta\cos\psi$, $A' = \sin\vartheta'\cos\psi'$.

Если положить $a(1+\xi) = b$ и $D(a,b)$ для второго коэффициента в (4.1.12), а также использовать новые обозначения, то получится

$$D = (1+\zeta)D(a,b) = D(a+a\zeta, a'+a'\zeta') = D[\zeta,\zeta'], \tag{4.1.12$'$}$$

$$D(a,a') = D[0,0] = D_0.$$

При выражении через новую переменную ξ потенциал U принимает вид

$$U = \Delta(1+\zeta)^2 \int\limits_0^1 \varkappa' \, da' \int \frac{a'^2(1+\xi)^2 \left(1 + \dfrac{\partial a'\xi}{\partial a'}\right) d\sigma'}{D(a,b)} = \\ = \Delta(1+\zeta)^2 \int\limits_0^1 \varkappa' \, da' \int \left(1 + \frac{\partial a'\xi}{\partial a'}\right) \frac{b^2 d\sigma'}{D(a,b)}. \tag{4.1.13}$$

Чтобы разложить в степенной ряд имеющийся поверхностный интеграл, примем во внимание, что

$$\int \frac{b^2 \, d\sigma'}{D(a,b)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'^n}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial b^n} \int \frac{b^2 \xi^n \, d\sigma'}{D(a,b)} \right\}_{b=a'},$$

поскольку $b = a' + a'\xi$, и что

$$\int \frac{b^2 \dfrac{\partial a'\xi}{\partial a'}}{D(a,b)} \, d\sigma' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a'^2}{n!} \left\{ \frac{\partial^n}{\partial b^n} \int \frac{b^2 \xi^n \dfrac{\partial a'\xi}{\partial a'}}{D(a,b)} \, d\sigma' \right\}_{b=a'}.$$

Другими словами,

$$\frac{a'^n \xi^n}{n!} \frac{\partial a'\xi}{\partial a'} = \frac{1}{(n+1)!} \frac{\partial (a'\xi)^{n+1}}{\partial a'},$$

в силу чего поверхностный интеграл в (4.1.13) равен

$$J = \int \frac{b^2 \left(1 + \dfrac{\partial a'\xi}{\partial a'}\right)}{D(a,b)} \, d\sigma' = \\ = \int \frac{a'^2 d\sigma'}{D(a,a')} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{\partial (a'^n \xi)^n}{n!} \frac{b^2 d\sigma'}{D(a,b)} \right\}_{b=a'} + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \frac{\partial}{\partial a'} \int \frac{\partial (a'^n \xi)^n}{n!} \frac{b^2 d\sigma'}{D(a,b)} \right\}_{b=a'} = \\ = \int \frac{a'^2 d\sigma'}{D(a,a')} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \int \frac{\partial (a'^n \xi)^n b^2 d\sigma'}{D(a,b)} \right\}_{b=a'}.$$

При повторной подстановке переменной ζ' это выражение принимает вид

$$J = \int \frac{a'^2 d\sigma'}{D(a,a')} + \frac{1}{1+\zeta} \int \frac{a'^3(\zeta'-\zeta)d\sigma'}{D(a,a')} +$$
$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1+\zeta)^n} \frac{1}{n!} \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \int \frac{\partial(a'^n(\zeta'-\zeta)^n b^2\, d\sigma'}{D(a,b)} \right\}_{b=a'}.$$

Таким образом, (4.1.13) преобразуется в уравнение

$$U = (1+\zeta)^2 \Delta \int_0^1 \varkappa' da' \int \frac{a'^2 d\sigma'}{D(a,a')} +$$
$$+ (1+\zeta)\Delta \int_0^1 \varkappa' da' \frac{\partial}{\partial a'} \int \frac{a'^3(\zeta'-\zeta)\, d\sigma'}{D(a,a')} +$$
$$+ \Delta \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(1+\zeta)^{2-n}}{n!} \int_0^1 \varkappa' da' \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial^{n-1}}{\partial b^{n-1}} \int \frac{\partial(a'^n(\zeta'-\zeta)^n b^2 d\sigma'}{D(a,b)} \right\}_{b=a'}, \tag{4.1.14}$$

причем мы можем положить

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots . \tag{4.1.15}$$

Члены этого ряда задаются выражениями

$$\begin{aligned}
U_0 &= \Delta \int_0^1 a'^2 \varkappa' da' \int \frac{d\sigma'}{D(a,a')}, \\
U_1 &= 2\zeta U_0 + \Delta \int_0^1 \varkappa' da' \frac{\partial}{\partial a'} \int \frac{a'^3(\zeta'-\zeta)}{D(a,a')}\, d\sigma', \\
U_2 &= \zeta^2 U_0 + \zeta\Delta \int_0^1 \varkappa' da' \frac{\partial}{\partial a'} \int \frac{a'^3(\zeta'-\zeta)}{D(a,a')}\, d\sigma' + \\
&+ \frac{\Delta}{2} \int_0^1 \varkappa' da' \frac{\partial}{\partial a'} \left\{ \frac{\partial}{\partial b} \int \frac{\partial(a'^2 b^2 (\zeta'-\zeta)^2}{D(a,b)}\, d\sigma' \right\}_{b=a'}.
\end{aligned} \tag{4.1.16}$$

Значения этих членов в центре эллипсоида ($a = 0$) равны

$$U_0(0) = \Delta \int\limits_0^1 \varkappa' a'^2\, da' \int \frac{d\sigma'}{D(0, a')},$$
$$U_1(0) = \Delta \int\limits_0^1 \varkappa'\, da' \frac{\partial}{\partial a'} \int \frac{a'^3 \zeta'\, d\sigma'}{D(0, a')}. \tag{4.1.17}$$

При $n > 2$ мы имеем $U_n(0) = 0$. С помощью метода Коши (метода мажорантных функций) Ляпунов смог доказать, что ряд (4.1.15) является абсолютно и равномерно сходящимся, если выполняются условия (4.1.9) и

$$l + g < 1. \tag{4.1.18}$$

Первый член уравнения (4.1.15) U_0 — это потенциал эллипсоида E, в котором эллипсоиды E_a являются поверхностями равной плотности. Это несложно увидеть из (4.1.2) и (4.1.7), где следует положить $\zeta = \zeta' = 0$.

При условиях (4.1.9) и (4.1.18) выражение

$$\frac{U' - \widehat{U}}{D}$$

также можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд, как показал Ляпунов, причем важно отметить, что во всех этих разложениях ζ, равно как и δ, не считаются бесконечно малыми. С помощью только что выведенных формул мы покажем, как функциональное уравнение (1.1.8) можно свести к набору интегральных и интегро-дифференциальных уравнений.

4.2. Интегральное уравнение Ляпунова

Дальнейшее развитие этой теории основано на решении интегрального уравнения

$$\xi - \nu \int\limits_{\Sigma} \frac{\xi' d\sigma'}{D} = \Xi, \tag{4.2.1}$$

данного Ляпуновым. В этом уравнении ξ является функцией двух сферических координат ϑ и ψ, а Ξ — заданной непрерывной функцией этих переменных. Мы полагаем, что Ξ зависит только от ϑ и ψ. Величина D, как и ранее, является расстоянием между точками $M(\vartheta, \psi)$ и $M'(\vartheta', \psi')$ эллипсоида E, а интегрирование происходит по единичной сфере Σ. Положив в (4.1.12) $\zeta = \zeta' = 0$ и $a = a' = 1$, получаем

$$\begin{gathered} D^2 = (\varrho + 1)[\sin\vartheta\cos\psi - \sin\vartheta'\cos\psi']^2 + \\ + (\varrho + q)[\sin\vartheta\sin\psi - \sin\vartheta'\sin\psi']^2 + \varrho[\cos\vartheta - cos\vartheta']. \end{gathered} \tag{4.2.2}$$

Вместо этого выражения в уравнении (4.2.1), которое получается из (4.1.12) и (4.1.12′) при $\zeta = \zeta' = 0$ и $a' = 1$, также может использоваться расстояние $D(a, 1)$.

Чтобы решить неоднородное линейное интегральное уравнение (4.2.1), нужно использовать однородное уравнение Лиувилля (раздел (1.6)).

Если функция Ξ непрерывна, то и ξ тоже будет непрерывной. Уравнение (4.2.1) будет иметь решение, если эта функция удовлетворит определенным условиям. Чтобы получить эти условия, умножим (4.2.1) на $Y_{n,s}\, d\sigma$ и проинтегрируем произведение по единичной сфере. Тогда получим

$$\int \xi Y_{n,s}\, d\sigma - \nu \int Y_{n,s}\, d\sigma \int \frac{\xi'\, d\sigma'}{D} = \int \Xi Y_{n,s}\, d\sigma.$$

Если изменить интегрирование во втором члене на обратное, получим

$$-\nu \int \xi'\, d\sigma' \int \frac{Y_{n,s} d\sigma}{D}.$$

Поскольку выражение (4.2.2) симметрично относительно переменных, формулы (1.6.5)– (1.6.6) дают

$$-\nu \int \xi' \frac{Y'_{n,s}}{\nu_{n,s}}\, d\sigma' = -\frac{\nu}{\nu_{n,s}} \int \xi Y_{n,s}\, d\sigma,$$

откуда

$$\frac{\nu_{n,s} - \nu}{\nu_{n,s}} \int \xi Y_{n,s}\, d\sigma = \int \Xi Y'_{n,s}\, d\sigma.$$

Из (1.6.5) и (1.6.10) следует, что выражение

$$T_{n,s} = \frac{\nu_{n,s} - \nu}{\nu_{n,s}} \tag{4.2.3}$$

зависит от ϱ. Тогда мы имеем

$$T_{n,s} = 0 \quad \text{при } \nu = \nu_{n,s}, \tag{4.2.4}$$

т. е. только при определенных значениях ϱ. Этим значениям соответствуют бифуркационные эллипсоиды. Для эллипсоидов Маклорена существуют условия

$$T_{1,0} = 0, \quad \nu_{1,s} = \nu \tag{4.2.5}$$

и

$$T_{p,2k} = 0, \quad T_{p,2k-1} = 0. \tag{4.2.6}$$

Для эллипсоидов Якоби нужны другие условия. Элементы эллипсоидов бифуркации или критических эллипсоидов до седьмого порядка вычислили Гумберт [1] и Орлов [2].

Теперь, принимая во внимание (4.2.3) и уравнение, предшествующее ему, несложно увидеть, что функция Ξ должна удовлетворять условиям

$$\int \Xi Y_{n,s}\, d\sigma = 0 \tag{4.2.7}$$

для любых значений n и s, при которых справедливы уравнения (4.2.4). Следующее равенство верно всегда:

$$\int \Xi Y_{1,0}\, d\sigma = 0. \tag{4.2.8}$$

Предположим, что Ξ можно разложить в ряд Лапласа:

$$\Xi = \sum A_{n,s} Y_{n,s}, \tag{4.2.9}$$

который сходится абсолютно и равномерно. Тогда имеем

$$A_{n,s} = \frac{1}{\gamma_{n,s}} \int \Xi Y_{n,s}\, d\sigma, \tag{4.2.10}$$

где

$$\gamma_{n,s} = \int Y_{n,s}^2\, d\sigma, \tag{4.2.11}$$

поскольку функции $Y_{n,s}$ являются ортогональными. Частное решение (4.2.1) найти несложно. Оно имеет вид

$$\xi = \sum \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s}, \tag{4.2.12}$$

где суммирование распространяется на все значения n и s, кроме тех, при которых $T_{n,s} = 0$. Подставляя (4.2.9) и (4.2.12) в уравнение (4.2.1), получаем

$$\sum \left\{ \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s} - \frac{\nu A_{n,s}}{T_{n,s}} \int \frac{Y'_{n,s}\, d\sigma'}{D} \right\} = \sum A_{n,s} Y_{n,s},$$

или

$$\sum \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s} \left(1 - \frac{\nu}{\nu_{n,s}}\right) = \sum A_{n,s} Y_{n,s}.$$

Имеем тождество.

Таким образом, общее решение получает путем прибавления к частному решению (4.2.12) членов, соответствующих условиям $T_{m,r} = 0$. Эти члены состоят из сферических функций $Y_{m,r}$. Тогда общее решение имеет вид

$$\xi = \sum \frac{A_{n,s}}{T_{n,s}} Y_{n,s} + \sum a_{m,r} Y_{m,r}, \tag{4.2.13}$$

где $a_{m,r}$ — произвольные постоянные, число которых не превышает трех. Тот факт, что (4.2.13) является общим решением, подтверждается тем, что непрерывная функция (ξ) полностью определена, если известны значения всех интегралов $\int \xi Y_{n,s}\, d\sigma$. Эти интегралы либо определяются коэффициентами $A_{n,s}$, либо могут быть определены, если принять, что постоянные $a_{m,r}$ имеют некоторые определенные значения. Функция (4.2.12) имеет конечное значение. Ляпунов также доказал, что если Ξ определяется условиями, аналогичными (4.1.9) для ζ, то функция ξ будет удовлетворять тем же условиям.

В следующем разделе мы покажем, при каких условиях основное уравнение в теории фигур равновесия сводится Ляпуновым к некоторому набору интегральных уравнений типа (4.2.1) для неоднородных жидкостей. Аналогичное преобразование уже использовалось в более ранней работе Ляпунова, а именно в теории однородных фигур равновесия, лишь немного отличающихся от эллипсоида. Представив координаты точки на свободной поверхности с помощью формул

$$x = \sqrt{\varrho + \zeta + 1}\sin\vartheta\cos\psi,$$
$$y = \sqrt{\varrho + \zeta + 1}\sin\vartheta\sin\psi,$$
$$z = \sqrt{\varrho + \zeta}\cos\vartheta$$

вместо (4.1.2) и предположив, что ζ можно разложить в ряд $\sum \zeta_i$, Ляпунов получил интегральные отношения вида (4.2.1) для функций ζ_1. Интегральное уравнение Ляпунова (4.2.1) также исследовал Крудели [1]. Он смог показать, что это уравнение можно свести к уравнению Фредгольма второго рода, имеющего конечное ядро[1].

[1]Насколько нам известно, Крудели был единственным исследователем, назвавшим решения этого уравнения фигурами равновесия Ляпунова.

4.3. Преобразование основного уравнения

Записав уравнения поверхности уровня F_a в параметрическом виде, мы получим малые значения функции $\zeta(a, \vartheta, \psi)$, если предположим, что стратификация в фигуре равновесия мало отличается от эллипсоидальной. Однако в любом случае функцию можно выразить через координаты x, y, z, т. е. $\zeta(a, \vartheta, \psi) = \zeta^*(x, y, z)$.

Тогда, по (4.1.2), уравнение поверхностей уровня имеет вид

$$\frac{x^2}{\varrho+1} + \frac{y^2}{\varrho+q} + \frac{z^2}{\varrho} = a^2(1+\zeta^*)^2, \tag{4.3.1}$$

а свободная поверхность задается уравнением

$$\frac{x^2}{\varrho+1} + \frac{y^2}{\varrho+q} + \frac{z^2}{\varrho} = (1+\overline{\zeta}^*)^2, \tag{4.3.2}$$

где $\overline{\zeta}^*$ — значение ζ на этой поверхности при $a = 1$.

Поскольку плотность является функцией параметра a и $\varkappa = f(p)$, давление p также можно выразить через этот параметр, $p = p(a)$. Тогда в уравнении (1.1.5) правый член представляет собой функцию от a, а уравнение поверхностей уровня, вытекающее из уравнений движения жидкости, имеет вид

$$U + \frac{\omega^2}{2f}(x^2+y^2) = \mathrm{funct}(a). \tag{4.3.3}$$

Потенциал U можно разложить в ряд (4.1.15). Таким образом, левый член (4.3.3) становится функцией от ζ. Теперь именно это уравнение является основным, и из него можно найти функцию ζ. Если закон плотностей задан в виде (4.1.1), преобразование

$$U = \Psi + \delta\Phi \tag{4.3.4}$$

введет два новых выражения Ψ и Φ, которые можно вывести из U. Чтобы получить эти функции, в уравнении (4.1.7) следует взять коэффициенты 1 и $\varphi(a')$ вместо $\varkappa'$. Тогда если функцию Ψ или Φ разложить в ряд

$$\Psi = \sum_{i=0}^{\infty} \Psi_i \qquad \Phi = \sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i, \tag{4.3.5}$$

то функции Ψ_i и Φ_i будут определяться формулами (4.3.16), где $\varkappa'$, очевидно, нужно выбирать равным 1 или $\varphi(a')$. Первый член Ψ_0 представляет потенциал однородного эллипсоида E. Во втором уравнении (4.1.16), если $\varkappa' = 1$, интегрирование по a' дает

$$\Psi_1 = 2\zeta\Psi_0 + \Delta \int \frac{(\overline{\zeta}' - \zeta)}{D(a,1)}\, d\sigma'. \tag{4.3.6}$$

Для дальнейшего преобразования ограничимся эллипсоидом вращения. Предположим, что точка $M(x, y, z)$ принадлежит эллипсоиду E_a, причем

$$\begin{aligned} x &= a\sqrt{\varrho + 1}\sin\vartheta\cos\psi, \qquad & y &= a\sqrt{\varrho+1}\sin\vartheta\sin\psi, \\ z &= a\sqrt{\varrho}\cos\vartheta, & \Delta &= (\varrho + 1)\sqrt{\varrho}. \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

Несложно увидеть, что переменную l в (2.1.5) можно выразить через ϱ, если взять оси $a\sqrt{\varrho+1}$ и $a\sqrt{\varrho}$, использованные в (4.3.7). Тогда $l = 1/\sqrt{\varrho}$. Теперь, если постоянную из (2.2.1) записать в виде

$$2\pi f \Delta \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$$

и при этом использовать уравнения (4.3.1) и (2.2.8), функция Ψ_0 будет задана выражением

$$\begin{aligned} \Psi_0 = 2\pi\Delta\Bigg[&\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\varrho}} - \frac{1}{2}a^2(\varrho+1)\sin^2\vartheta\left(\operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\varrho}} - \frac{\sqrt{\varrho}}{\varrho+1}\right) - \\ &- a^2\varrho\cos^2\vartheta\left(\frac{1}{\sqrt{\varrho}} - \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right)\Bigg]. \end{aligned} \tag{4.3.8}$$

Положим теперь

$$C = \frac{1}{2}\int\limits_{\rho}^{\infty}\frac{dt}{(t+1)\sqrt{t}} = \operatorname{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\varrho}}. \tag{4.3.9}$$

Интеграл

$$J = \int \frac{d\sigma'}{D(a,1)}$$

представляет собой потенциал слоя на эллипсоиде E во внутренней точке M. Он равен его значению в центре E, где $D(a,1) = D(0,1)$. По формуле (4.1.12) в случае эллипсоида мы имеем

$$D(0,1) = (\varrho + \sin^2\vartheta')^{\frac{1}{2}}.$$

Положив $\cos\vartheta = \overline{\mu}$, мы получаем

$$\int \frac{d\sigma'}{D(0,1)} = \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta' d\vartheta' d\psi'}{\sqrt{\varrho + \sin^2\vartheta'}} =$$

$$= 2\pi \int\limits_{-1}^{1} \frac{d\overline{\mu}'}{\sqrt{\varrho + 1 - \overline{\mu}'^2}} = 4\pi \sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varrho + 1}}.$$

Поскольку

$$\sin^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varrho + 1}} = \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varrho}},$$

а в соответствии с (4.3.9) $J = 4\pi C$, мы имеем

$$\Psi_1 = (2\Psi_0 - 4\pi C\Delta)\zeta + \Delta \int \frac{\overline{\zeta}' d\sigma'}{D(a,1)}. \tag{4.3.10}$$

Из-за (4.3.4) и (4.3.5) уравнение (4.3.3) можно записать в виде

$$\Psi_0 + \Psi_1 + \frac{\omega^2}{2f}(c^2 + y^2) = \operatorname{funct}(a) - \delta\Phi - \sum_{t=2}^{\infty} \Psi_i. \tag{4.3.11}$$

Поскольку эллипсоид E является фигурой равновесия, условие

$$\Psi_0 + \frac{\omega^2}{2f}(x_a^2 + y_a^2) = h_a$$

должно выполняться на любой поверхности E_a, а сумма в скобках представляет собой квадрат расстояния от этой точки на E_a до оси вращения, тогда как h_a — это число, не изменяющееся на этой поверхности. При этом оно зависит от a. Выражение для h_a можно определить из (4.3.8), положив $\vartheta = 0$. Оно будет иметь вид

$$h_a = 2\pi\Delta \left[\operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varrho}} - a^2 \left(\sqrt{\varrho} - \varrho \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varrho}}\right)\right].$$

Если теперь положить

$$R = \sqrt{\varrho} - \varrho \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varrho}}, \tag{4.3.12}$$

то получится, что

$$h_a = 2\pi\Delta(C - a^2 R). \tag{4.3.13}$$

Согласно (4.3.7) имеем

$$x_a^2 + y_a^2 = a^2(\varrho + 1)\sin^2\vartheta,$$

и для поверхности E_a это условие принимает вид

$$\Psi_0 + \frac{\omega^2}{2f}a^2(\varrho+1)\sin^2\vartheta = 2\pi\Delta(C - a^2R). \tag{4.3.14}$$

Выражение для Ψ_0, определенное с помощью этого уравнения, и Ψ_1 из уравнения (4.3.10) можно подставить в (4.3.11). Тогда мы имеем

$$2\pi\Delta(C - a^2R) - \frac{\omega^2}{2f}a^2(\varrho+1)\sin^2\vartheta - \left[4\pi\Delta a^2R + \frac{\omega^2}{f}a^2(\varrho+1)\sin^2\vartheta\right]\zeta +$$
$$+\frac{\omega^2}{2f}s^2 + \Delta\int\frac{\overline{\zeta}'d\sigma'}{D(a,1)} = -\sum_{i=2}^{\infty}\Psi_i - \delta\Phi + \mathrm{funct}(a),$$

где

$$s^2 = a^2(1+\zeta)^2(\varrho+1)\sin^2\vartheta,$$

поскольку условие (4.3.3) справедливо для поверхностей уровня F_a, отличающихся от E_a. Путем перестановки членов получаем

$$\begin{gathered}-4\pi\Delta a^2R\zeta + \Delta\int\frac{\overline{\zeta}'\,d\sigma'}{D(a,1)} = 2\pi\Delta(a^2R - C) - \\ -\frac{\omega^2}{2f}a^2(\varrho+1)\sin^2\vartheta\zeta^2 - \sum_{i=2}^{\infty}\Psi_i - \delta\Phi + \mathrm{funct}(a).\end{gathered} \tag{4.3.15}$$

Это уравнение имеет вид

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi a^2}\int\frac{\overline{\zeta}'\,d\sigma'}{D(a,1)} = W + P(a). \tag{4.3.16}$$

При $a \neq 0$ можно положить, что

$$\begin{gathered}W = \frac{\omega^2}{8f\pi\Delta}(\varrho+1)\sin^2\vartheta\zeta^2 + \\ +\frac{1}{4\pi a^2\Delta}\left\{\sum_{i=2}^{\infty}\Psi_i - \Psi_2(0) + [\Phi - \Phi(0)]\delta\right\},\end{gathered} \tag{4.3.17}$$

$$P(a) = -\frac{1}{4\pi a^2\Delta}\{\mathrm{funct}(a) + 2\pi\Delta(a^2R - C) - \Psi_2(0) - \Phi(0)\delta\}. \tag{4.3.18}$$

Члены $\Psi_2(0) = [\Psi_2]_{a=0}$ и $\Phi(0) = [\Phi]_{a=0}$ не зависят от ϑ и ψ. Что касается функции W, она зависит от ζ^2 и членов высшего порядка.

Принимая во внимание все выражения для W, Ψ_i и Φ, несложно увидеть, что уравнение (4.3.16) принадлежит к классу интегро-дифференциальных уравнений. Теперь уравнение (4.3.3) запишется в виде (4.3.16) для фигур равновесия, удовлетворяющих вышеупомянутым условиям.

Решение этого уравнения ζ представляет собой функцию двух переменных, a и ϑ, поскольку она пишется для эллипсоида вращения и для параметра δ. Ляпунов также разрешил и общий случай, в котором $\zeta = \zeta(a, \vartheta, \psi)$. Это вторая неизвестная функция из уравнения (4.3.15). Она обозначается символом $\mathrm{funct}(a)$. Тем не менее, имея второе условие, мы можем определить функцию ζ. Вторым условием является уравнение (4.1.6).

Теперь, чтобы решить имеющуюся задачу по Ляпунову, мы должны допустить, что функция ζ может быть разложена в ряд

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \delta^i \tag{4.3.19}$$

где член ζ_0 опускается, чтобы исключить случай однородной жидкости. Если положить

$$W = \sum_{i=1}^{\infty} W_i \delta^i, \tag{4.3.20}$$

то из уравнения (4.3.16) получится набор условий

$$R\zeta_i - \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{\overline{\zeta}_1' d\sigma'}{D(a,1)} = W_i + P_i \tag{4.3.21}$$

для коэффициентов ζ_i. Помимо этих уравнений, подстановка (4.3.19) в (4.1.6) дает условия

$$\begin{gathered}\int \zeta_1\, d\sigma = 0, \quad \int \zeta_2\, d\sigma = -\int \zeta_1^2\, d\sigma, \\ \int \zeta_3\, d\sigma = -2\int \zeta_1\zeta_2 d\sigma - \frac{1}{3}\int \zeta_1^3\, d\sigma, \ldots, \int \zeta_i\, d\sigma = N_i,\end{gathered} \tag{4.3.22}$$

где N_i зависит от $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{i-1}$. Чтобы исключить функции P_i в (4.3.21), умножим это уравнение на $d\sigma$ и проинтегрируем по единичной сфере Σ. Тогда

$$RN_i - \frac{1}{4\pi a^2} \int \overline{\zeta}_i'\, d\sigma' \frac{d\sigma}{D(a,1)} = \int W_i\, d\sigma 4\pi + P_i. \tag{4.3.23}$$

В поверхностном интеграле J_1 знаменатель $D(a,1)$ представляет собой расстояние от точки на E_a до некоторой точки на E. Если в уравнениях (4.1.4), (4.1.5), (4.1.7) положить $\zeta = \zeta' = 0$, то последнее уравнение будет потенциалом однородного слоя между поверхностями E_a и E_{a+da} в точке эллипсоида E. Плотность этого слоя равна единице, так что мы получаем выражение

$$a^2\, da\Delta(\varrho) \int \frac{d\sigma}{D(a,1)} = a^2 \Delta(\varrho)\, da J_1.$$

Изменив обозначения в общеизвестном выражении для потенциала однородного эллипсоида (см., например, Аппель [1], том III) в точке $M(x,y,z)$, расположенной за его пределами, мы получим этот потенциал в виде

$$U_e = \pi\Delta(\varrho) \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \left(a^2 - \frac{x^2}{t+1} - \frac{y^2}{t+q} - \frac{z^2}{t}\right) \frac{dt}{\Delta(t)}, \tag{4.3.24}$$

где e — положительный корень уравнения

$$\frac{x^2}{t+1} + \frac{y^2}{t+q} + \frac{z^2}{t} = a^2, \tag{4.3.25}$$

соответствующий эллипсоиду, конфокальному E_a и проходящему через точку M. Тогда потенциал только что рассмотренного слоя будет иметь вид

$$DU_e = 2\pi\Delta(\varrho) a\, da \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} d\frac{dt}{\Delta(t)} - \pi\Lambda(\varrho)\left(a^2 - \frac{x^2}{\varepsilon+1} - \frac{y^2}{\varepsilon+q} - \frac{z^2}{\varepsilon}\right)\frac{d\varepsilon}{\Delta(\varepsilon)},$$

поскольку U_e и ε — это функции от параметра a. Выражение в скобках обращается в ноль из-за (4.3.25), вследствие чего мы можем сравнить два выражения для потенциала этого слоя:

$$J_1 = \int \frac{d\sigma}{D(a,1)} = \frac{2\pi}{a} \int\limits_{\varepsilon}^{\infty} \frac{dt}{\Delta(t)}. \tag{4.3.26}$$

Для эллипсоида вращения ($q = 1$) уравнение (4.3.26) можно выразить через элементарные функции, а именно:

$$J_1 = \frac{4\pi}{a} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4.3.27}$$

где ε — положительный корень уравнения

$$\frac{\varrho+1}{t+1}\sin^2\vartheta' + \frac{\varrho}{t}\cos^2\vartheta' = a^2. \tag{4.3.28}$$

Это уравнение несложно получить из (4.3.25) и (4.1.2), если записать эти уравнения для случая $\zeta = 0$.

Исключая P_i с помощью уравнений (4.3.26), (4.3.23) и (4.3.21), получаем

$$\begin{aligned} R\zeta_i - \frac{1}{4\pi a^2}\int \zeta_i'\left(\frac{1}{D(a,1)} - \frac{1}{2a}\int\limits_{\varepsilon}^{\infty}\frac{dt}{\Delta(t)}\right)d\sigma' = \\ = W_i - \frac{1}{4\pi}\int W_i\, d\sigma + \frac{1}{4\pi}RN_i. \end{aligned} \tag{4.3.29}$$

Правый член этого уравнения зависит от функций $\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}$. Если эти функции определены, то для нахождения следующей функции ζ_i можно использовать (4.3.29).

Положим теперь в (4.3.29) $a = 1$ и обозначим через $\overline{\zeta}_i$ соответствующее значение функции ζ_i. Тогда для $\overline{\zeta}_i$ мы имеем уравнение

$$R\overline{\zeta}_i - \frac{1}{4\pi}\int\frac{\overline{\zeta}_i'\, d\sigma'}{D(1,1)} = \overline{W}_i + \mathrm{const}. \tag{4.3.30}$$

Это интегральное уравнение типа (4.2.1), и мы только что использовали для его решения метод Ляпунова. В случае эллипсоидов Якоби выражение W_i будет зависеть от обоих углов ϑ и ψ, но мы будем рассматривать только эллипсоид вращения. Из формулы (4.3.17) следует, что W_i — функция от ϑ. Два последних члена в (4.3.29) дают постоянные. Теперь если функция $\overline{\zeta}_i$ определяется из уравнения (4.3.30), то соответствующая функция ζ_i может быть вычислена непосредственно с помощью (4.3.29). Таким образом, решение интегро-дифференциального уравнения (4.3.16) сводится к решению бесконечного множества интегральных уравнений (4.3.30). Из этого множества можно последовательно вычислить члены ряда (4.3.19). Однако на практике вычисление первых трех членов ряда в случае неоднородной жидкости заняло несколько сотен страниц вышеупомянутого труда Ляпунова. Следует отметить, что для исключения всяческих сомнений относительно существования этих фигур равновесия Ляпунов доказал все промежуточные этапы. Важное достижение этого метода состоит в возможности использования любого желаемого приближения. Для сравнения – анализ Пуанкаре ограничивался только первым приближением[2], о чем мы уже упоминали ранее.

Мы приведем лишь окончательные выражения Ляпунова для первого приближения, т. е. для функции ζ_1:

$$\zeta_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(l)} A_{n,l}^{(1)} Y_{2n,4l} \tag{4.3.31}$$

(Ляпунов [9, стр. 170]).

Для получения этого результата первым делом нужно разложить функцию W_1 в ряд

$$W_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{(l)} A_{n,l} Y_{2n,4l} + \text{funct}(a), \tag{4.3.32}$$

где

$$A_{n,l} = -\frac{2\pi}{\gamma_{2n,4l}} \begin{pmatrix} 2n, & 2l \\ 2i, & 2j \end{pmatrix} \frac{\mathfrak{F}_{2n,4l}}{4n+1} \int\limits_0^1 \varphi(av)(1-v^2)v^2 \frac{\Omega_{n,0}(v^2)}{\Omega_{n,0}(1)}\, dv, \tag{4.3.33}$$

и, согласно (4.2.11),

$$\gamma_{2n,4l} = \int (Y_{2n,4l})^2 \, d\sigma.$$

По определению коэффициенты, обозначенные массивом, имеют вид

$$\begin{pmatrix} 2n, & 2l \\ 2i, & 2j \end{pmatrix} = \frac{(4n+1)\Delta}{\gamma_{2i,4j} \mathfrak{E}_{2i,4j} \mathfrak{F}_{2i,4j}} \int \frac{Y_{2i,4j} Y_{2n,4l}}{H}\, d\sigma, \tag{4.3.34}$$

где

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}_{2n,4l}(u) &= E_{2n,4l}(i\sqrt{u}) \\ \mathfrak{F}_{2n,4l}(u) &= \frac{2n+1}{2} \mathfrak{E}_{2n,4l}(u) \int_u^{\infty} \frac{du}{\mathfrak{E}_{2n,4l}^2 \sqrt{u(u+1)(u+q)}} \end{aligned} \tag{4.3.35}$$

и

$$\begin{aligned} H = (\varrho + \mu^2)(\varrho + \nu^2) = (\varrho + q)\varrho \sin^2 \vartheta \cos^2 \psi + \\ + \varrho(\varrho + 1) \sin^2 \vartheta \sin^2 \psi + (\varrho + 1)(\varrho + q) \cos^2 \vartheta. \end{aligned} \tag{4.3.36}$$

---

[2]Упрощенное вычисление в случае эллипсоида вращения представлено в работе Ярдецкого [3] для задачи о зональном вращении.

$\mathfrak{E}$ и $\mathfrak{F}$ — старые обозначения функций Ламе (см., например, Heine, E., *Theorie der Kugelfunctionen*, 1878 г., том I, стр. 358, 385). В обозначениях, используемых в третьей главе этой книги, $E(\mu) = M$, $E(\nu) = N$ и т. д.

Функция Ω, использованная в (4.3.33), является решением дифференциального гипергеометрического уравнения. Гипергеометрический ряд имеет вид

$$\Omega_{m,n}(z) = F\left(n + 1 - m, n + m + \frac{3}{2}, 2n + \frac{3}{2}, z\right). \tag{4.3.37}$$

Наконец,

$$A_{n,l}^{(1)} = \frac{\overline{A}_{n,l}}{T_{n,l}}, \tag{4.3.38}$$

где $T_{n,l}$ зависит от собственных значений интегрального уравнения, заданного (4.2.3).

Эти несколько формул свидетельствуют о крайней сложности теории Ляпунова. В своем научном труде автор применил ее к случаю однородной жидкости, и существование фигур равновесия, лишь немного отличающихся от эллипсоида, получило еще одно подтверждение.

Последний вывод теории звучит следующим образом (Ляпунов [9, стр. 436]): *во всех случаях* (определенных вышеупомянутыми условиями) *поверхность фигуры равновесия определяется уравнением вида*

$$\frac{X^2}{\varrho + 1} + \frac{Y^2}{\varrho + q} + \frac{Z^2}{\varrho} = 1 + \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_i(X, Z)\alpha^i, \tag{A}$$

где Φ_i — целая функция от X, Z степени $(m-2)i + 2$. Она является четной функцией от Z и четной или нечетной функцией от X, когда произведение mi является четным или нечетным соответственно. Что касается присутствующей в этом уравнении α, это параметр, через который можно выразить функцию ζ. В ходе исследований, связанных с однородными жидкостями, Ляпунов использовал выражение $\alpha = \sqrt{\int \zeta^2\, d\sigma}$, а также второй параметр $\eta = (\omega^2 - \omega_0^2)/2f$.

Из доказанного Ляпуновым факта, что все Φ_i являются четными функциями от Z, следует симметрия всех фигур равновесия относительно экваториальной плоскости. Общий вид этого утверждения предложил Лихтенштейн (глава V).

Важность последнего результата теории Ляпунова очевидна. Уравнение (A) является самым общим известным решением задачи о фигурах равновесия.

4.4. Уравнение Клеро и более общие уравнения

Формулы, приведенные в предыдущем разделе, без труда преобразуются для случая сфероидов. Опуская в уравнении (4.1.2) коэффициенты $\sqrt{\varrho+1}$, $\sqrt{\varrho+q}$ и $\sqrt{\varrho}$, получаем поверхности уровня, которые лишь немного отличаются от сфер радиуса a. Обозначим радиус свободной поверхности невозмущенной неоднородной жидкой массы через A. Пусть $\varkappa = \varkappa(a)$ — плотность, а ω — угловая скорость вращения, имеющая небольшую величину. Формулы, которые Ляпунов (1903, 1904) использовал для вывода уравнения Клеро, представляют собой частный случай уравнений (4.1.7), (4.1.15), (4.1.16) и (4.3.3). В них уже нет малого параметра δ, входящего в закон плотностей, а функцию ζ, выражающую отклонение поверхности уровня от сферы, Ляпунов разложил в ряд

$$\zeta = \zeta_1\sigma + \zeta_2\sigma^2 + \ldots, \tag{4.4.1}$$

где

$$\sigma = \frac{\omega^2 A^2}{fm}. \tag{4.4.2}$$

Очевидно, что это отношение

$$\frac{v_E^2}{A} : \frac{fm}{A},$$

где $m = 4\pi\int_0^A \varkappa a^2 da$ — это общая масса. Систему уравнений для определения коэффициентов ζ_i, получающуюся из (4.3.30), можно решить, если принять, что

$$\zeta_i = \sum_{j=0}^{\infty} \zeta_{ij} P_j(\overline{\mu}),$$

где P_j — полиномы Лежандра, а $\overline{\mu} = \cos\vartheta$. Тогда функции ζ_{ij} должны удовлетворять уравнениям Лежандра–Лапласа

$$\begin{gathered}\zeta_{ij}\int_0^a \varkappa a^2 da - \frac{a^{-j}}{2j+1}\int_0^a \varkappa\, d(a^{j+3}\zeta_{ij}) - \\ - \frac{a^{j+1}}{2j+1}\int_a^A \varkappa\, d(a^{2-j}\zeta_{ij}) = a^3 W_j(a).\end{gathered} \tag{4.4.3}$$

Уравнение Клеро (раздел 2.4) получается для $i = 1$, $j = 2$, если положить

$$\zeta_{12} = -\frac{8\pi}{15}\frac{\alpha_a}{\sigma}, \qquad W_2 = -\frac{m}{15A^3}, \tag{4.4.4}$$

где α_a — эллиптичность слоя a. Из уравнения (4.4.3) эллиптичность можно выразить через a. Если дважды продифференцировать уравнение (4.4.3), несложно получить дифференциальное уравнение Клеро. Ясно, что для решения этих уравнений необходимо знать соответствующий закон плотностей.

Решение задачи Клеро теперь выражается следующим образом:

$$\zeta = \zeta_1\sigma = -\frac{5\sigma}{4\pi}\zeta_{12}P_2(\overline{\mu}). \tag{4.4.5}$$

Чтобы распространить эту теорию на те случаи, в которых плотность не является непрерывной функцией параметра a, Ляпунов также рассмотрел уравнения вида

$$\widetilde{\zeta}\int\limits_0^a \varkappa a^2 da - \frac{a^{-j}}{2j+1}\int\limits_0^a \varkappa\Delta\left(a^{j+3}\widetilde{\zeta}\right) - \frac{a^{j+1}}{2j+1}\int\limits_0^A \varkappa\Delta\left(a^{2-j}\widetilde{\zeta}\right) = a^3W(a) \tag{4.4.6}$$

для всех значений a, принадлежащих интервалу $(0, A)$. Уравнение (4.4.6) является обобщением известных интегро-дифференциальных уравнений, содержащих интегралы Римана.

Глава 5

Исследования Лихтенштейна

5.1. Однородная масса

Сложность и большой объем теории Ляпунова обусловлены трудностями, с которыми сопряжена задача о равновесии жидкой массы, и, безусловно, желанием ее автора не упустить ни одного доказательства ее основ. Некоторую модификацию метода Ляпунова в целом ряде статей предложил Лихтенштейн [2]. Его книга *Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten* [1] представляет собой синтез этих исследований. Получив точный метод решения функционального уравнения (4.3.3), который сводит его к интегро-дифференциальному уравнению, а в частном случае, рассмотренном в четвертой главе,— к системе интегральных уравнений, Ляпунов не развивал свой метод в более общем виде. Он даже не использовал эти названия по отношению к вышеупомянутым уравнениям. Такое обобщение получил Лихтенштейн. Добавив несколько новых положений, Лихтенштейн смог рассмотреть общую задачу существования фигур равновесия вблизи известной. Пуанкаре постулировал существование новых фигур равновесия, близких к любой заданной фигуре равновесия однородной жидкой массы. Не выдвигая никаких предположений относительно формы этой первичной фигуры, Лихтенштейн получил основное интегро-дифференциальное уравнение для такой общей задачи, причем это уравнение относится к типу, рассмотренному Ляпуновым [1] (четвертая глава). Решение этого уравнения основано на методе последовательных приближений и теории Фредгольма. Однако все эти обобщения касаются прежде всего математического решения данной задачи, тогда как новых типов фигур равновесия в реальности не вычисляется.

Согласно Лихтенштейну, в данном случае удобно использовать параметры ξ и η и записать уравнение свободной поверхности однородной жидкой массы в виде

$$x = F(\xi, \eta), \quad y = G(\xi, \eta), \quad z = H(\xi, \eta). \tag{5.1.1}$$

Эта поверхность может не ограничиваться только одной границей сплошной массы. Она может иметь несколько раздельных частей, однако считается, что

$$\left[\frac{\partial(F,G)}{\partial(\xi,\eta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(G,H)}{\partial(\xi,\eta)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(H,F)}{\partial(\xi,\eta)}\right]^2 \neq 0, \tag{5.1.2}$$

т. е. особых точек на ней нет.

Предположим теперь, что S является поверхностью фигуры равновесия однородной жидкой массы, соответствующей угловой скорости ω. Допустим, что для нового значения угловой скорости ω_1, немного отличающегося от значения ω, в окрестности S мы получаем другую поверхность S_1. Уравнение новой свободной поверхности жидкости можно записать в виде

$$\zeta = \zeta(\xi, \eta, \omega_1), \tag{5.1.3}$$

где ζ — малое расстояние от точки на S_1 до поверхности S, измеренное по нормали к последней. Предположим, что $|\zeta| < \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторое малое число. Уравнения поверхности S_1 имеют вид

$$x = F_1(\xi,\eta), \quad y = G_1(\xi,\eta), \quad z = H_1(\xi,\eta),$$

и, если записать условия равновесия (1.1.5) для S и S_1 и вычесть одно из другого, получится уравнение вида

$$\begin{aligned} U_1(F_1, G_1, H_1) - U(F, G, H) = \\ = \frac{\omega^2}{2f}(F^2 + G^2) - \frac{\omega_1^2}{2f}(F_1^2 + G_1^2) + C'. \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Если давление на граничной поверхности равно нулю, а объем жидкости неизменен, слагаемое C' обращается в нуль. Лихтенштейн полагает, что в этом случае

$$|\zeta|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\xi}\right|, \left|\frac{\partial\zeta}{\partial\eta}\right| \leqslant \varepsilon^* < \varepsilon_0.$$

Эти условия эквивалентны неравенствам Ляпунова (4.1.9)[1]. Факт справедливости последних, как уже говорилось ранее, доказал Ляпунов. Если ξ, η, ζ^* — значения параметров, соответствующих любой заданной точке

[1]Согласно последнему исследованию Лихтенштейна [4], существование производных $\partial\zeta/\partial\xi$ и $\partial\zeta/\partial\eta$ можно даже не постулировать. Их существование можно показать по определению ζ.

$P(x, y, z)$, то через эти параметры можно выразить потенциалы U и U_1 соответственно. Таким образом,

$$U(x,y,z) = W(\xi,\eta,\zeta^*), \quad U_1(x,y,z) = W_1(\xi,\eta,\zeta^*). \tag{5.1.5}$$

Тогда на единичную массу на поверхности S будет действовать сила притяжения

$$f\frac{\partial}{\partial n}W(\xi,\eta,0), \tag{5.1.6}$$

тогда как гравитационное ускорение будет равно

$$g = \frac{\partial}{\partial n}\left(fU + \frac{\omega^2 s^2}{2}\right).$$

Если $\gamma = ds/dn$ — косинус угла, образованного перпендикуляром к оси вращения с нормалью к S, то согласно (5.1.5) мы получим

$$g = f\frac{\partial}{\partial n}W(\xi,\eta,0) + \omega^2 s\gamma = f\widehat{g}. \tag{5.1.7}$$

Обозначим через D расстояние между двумя точками: (ξ,η) и (ξ',η'). По Лихтенштейну, можно допустить, что левое слагаемое в уравнении (5.1.4) можно разложить в ряд

$$f(U_1 - U) = U^{(1)} + U^{(2)} + \ldots, \quad U^{(n)} = f\int_S \frac{1}{D^n}K^n d\sigma', \tag{5.1.8}$$

где $K^{(n)}$ — полином n-й степени по $\zeta, \zeta', \partial\zeta'/\partial\xi', \partial\zeta'/\partial\eta'$. Тогда ряды

$$\begin{aligned} f\frac{\partial}{\partial\xi}(U_1 - U) &= f\sum_{n=1}^{\infty}\int_S \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{1}{D^n}K^{(n)}\right)d\sigma', \\ f\frac{\partial}{\partial\eta}(U_1 - U) &= f\sum_{n=1}^{\infty}\int_S \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{1}{D^n}K^{(n)}\right)d\sigma', \end{aligned} \tag{5.1.9}$$

равно как и (5.1.8), сходятся даже для комплексных значений ζ. Кроме того, можно показать, что если $\varkappa$ — плотность, то

$$U^{(1)} = f\zeta\frac{\partial}{\partial n}W(\xi,\eta,0) + f\int_S \frac{\varkappa'}{D}\zeta'\,d\sigma'. \tag{5.1.10}$$

Если теперь положить[2]

$$\omega_1^2 - \omega^2 = 2f\lambda, \quad F_1 = F + a\zeta, \quad G_1 = G + b\zeta, \quad H_1 = H + c\zeta \quad (5.1.11)$$

и подставить выражения (5.1.7), (5.1.8), (5.1.10), (5.1.11) в уравнение (5.1.4), получится уравнение вида

$$\widehat{g}\zeta + \int\limits_S \frac{\varkappa'}{D}\zeta'\,d\sigma' = C' - s^2\lambda + \Psi(\lambda,\zeta). \quad (5.1.12)$$

Поскольку $aF + bG = s\gamma$, функция

$$\begin{aligned}\Psi(\lambda,\zeta) = &-\frac{\omega^2}{2f}(a^2+b^2)\zeta^2 - 2s\gamma\lambda\zeta - (a^2+b^2)\lambda\zeta^2 - \\ &-\frac{1}{f}(U^{(2)} + (U^{(3)} + \ldots).\end{aligned} \quad (5.1.13)$$

Эта функция представляет сумму членов второго и высших порядков по переменным ζ и λ, тогда как коэффициенты $\widehat{g}$ и $\varkappa'/D$ при ζ и ζ' конечны. Из-за (5.1.8) уравнение (5.1.12) становится интегро-дифференциальным и аналогичным уравнению (4.3.16), которое Ляпунов получил для частного вида фигур равновесия, а именно для эллипсоидов. Если взять некоторое определенное значение ζ, то можно говорить о множестве значений параметров $\vartheta, \psi, \varepsilon\zeta$, которые при условии $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$ соответствуют телам, рассмотренным Ляпуновым. Для $\xi, \eta, \delta\zeta$ при $0 \leqslant \delta \leqslant 1$ оно соответствует множеству тел между заданной фигурой равновесия и новой фигурой из теории Лихтенштейна.

В уравнении (5.1.12) $\widehat{g}$ имеет отрицательное значение. Как и в теории Ляпунова, решение уравнения (5.1.12) основано на обсуждении однородного линейного интегрального уравнения

$$\widehat{g}\zeta + \int\limits_S \frac{\varkappa'}{D}\zeta' d\sigma' = 0. \quad (5.1.14)$$

С помощью подстановки $u = \zeta\sqrt{-\widehat{g}h}$ это уравнение без труда преобразуется в интегральное уравнение с симметричным ядром. Оно имеет два тривиальных решения, соответствующих очевидному свойству каждой

[2] Этот параметр λ тождествен величине η, введенной Ляпуновым и упоминавшейся в конце раздела 4.3.

фигуры равновесия. При переносе вдоль оси вращения или при повороте на некоторый угол относительно этой оси такая фигура равновесия продолжает соответствовать тем же значениям потенциала и угловой скорости. Эти два условия имеют вид $u_1 = \mathrm{const}$ и $u_2 = \mathrm{const}(Fb - Ga)$ и соответствуют условиям $T_{1,0} = 0$ и $T_{2,3} = 0$ теории Ляпунова (см. (4.2.4)).

Как известно из теории линейно-интегральных уравнений, собственные функции (u_k) преобразованного уравнения (5.1.14) можно нормировать и ортогонализировать. Тогда

$$\int\limits_S \varkappa \widehat{g} u_j u_l \, d\sigma = 0 \text{ при } j \neq l, \qquad \int\limits_S \varkappa \widehat{g} u_j^2 \, d\sigma = -1. \tag{5.1.15}$$

Если ϑ и ψ — сферические полярные координаты, и мы имеем фигуру вращения, то собственные функции относятся либо к типу $F(\vartheta)$, либо к типу $F(\vartheta)\cos k\psi$, либо к типу $F(\vartheta)\sin k\psi$.

Если $D(P, P_1)$ принять за расстояние между точками P и P_1, а

$$\frac{1}{D} = N(P, P_1) + \sum_{l=1}^{m} \widehat{g}\widehat{g}' u_l u_l', \tag{5.1.16}$$

уравнение

$$\widehat{g}\zeta + \int\limits_S \varkappa' N \zeta' d\sigma' = 0 \tag{5.1.17}$$

не имеет решений, представляющих собственные функции, как было доказано в теории интегральных уравнений.

С другой стороны, уравнение (5.1.12) можно записать в виде

$$\widehat{g}\zeta + \int\limits_S \varkappa' N \zeta' \, d\sigma' = C' - s^2\lambda + \Psi(\lambda, \zeta) + \sum_{l=1}^{m} \widehat{g} M_l u_l, \tag{5.1.18}$$

где

$$M_l = -\int\limits_S \varkappa' \widehat{g}' u_l' \zeta' \, d\sigma'. \tag{5.1.19}$$

Лихтенштейн доказал, что это уравнение имеет простое решение, если величины $\lambda, C', M_1, \ldots, M_m$ имеют достаточно малые значения. Это решение, равно как и первые производные по параметрам ξ и η, являются непрерывными функциями и удовлетворяют условиям (5.1.4). Его можно вычислить с помощью метода последовательных приближений. Пусть $Q(P, P_1)$

будет резольвентой. Тогда уравнение (5.1.4) принимает вид

$$\begin{aligned}\zeta = \frac{1}{\widehat{g}}(C' - s^2\lambda)\sum_{l=1}^{m} M_l u_l + \frac{1}{\widehat{g}}\Psi(\lambda, \zeta) - \\ - \int_S Q(P, P_1)\left[\frac{1}{\widehat{g}'}(C' - s'^2\lambda)\sum_{l=1}^{m} M_l u_l' + \frac{1}{\widehat{g}'}\Psi(\lambda, \zeta')\right] d\sigma'.\end{aligned} \tag{5.1.20}$$

Поскольку (см., например, Курант и Гильберт [1])

$$\int_S Q(P, P_1) u_l' \, d\sigma' = 0, \quad l = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.1.21}$$

если записать, что

$$C' - s^2\lambda + \Psi(\lambda, \zeta) = \Psi(C', \lambda, \zeta), \tag{5.1.22}$$

то (5.1.20) примет вид

$$\zeta = \frac{1}{\widehat{g}}\Psi(C', \lambda, \zeta) + \sum_{l=1}^{m} M_l u_l - \int_S Q(P, P_1)\frac{1}{\widehat{g}'}\Psi(C', \lambda, \zeta')\, d\sigma'. \tag{5.1.23}$$

Как и в теории Ляпунова для частного вида фигур равновесия (раздел 4.3), последовательные приближения получаются из системы интегральных уравнений. Первые два из этих уравнений получаются из (5.1.18) и имеют вид

$$\begin{aligned}\widehat{g}\zeta_1 + \int_S \varkappa' N \zeta_1' d\sigma' &= C' - s^2\lambda + \sum_{l=1}^{m} \widehat{g} M_l u_l, \\ \widehat{g}\zeta_2 + \int_S \varkappa' N \zeta_2' d\sigma' &= C' - s^2\lambda + \sum_{l=1}^{m} \widehat{g} M_l u_l + \Psi(\lambda, \zeta_1), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned} \tag{5.1.24}$$

а последующие уравнения получаются с помощью очевидного преобразования.

Уравнения (5.1.24) являются неоднородными линейно-интегральными уравнениями вида

$$\widehat{g}\zeta^* + \int_S \varkappa' N \zeta^{*\prime}\, d\sigma' = C' - s^2\lambda + \sum_{l=1}^{m} \widehat{g} M_l u_l + \Psi(\lambda, \overline{\zeta}^*), \tag{5.1.25}$$

где $\overline{\zeta}^*$ — заданная функция.

Согласно общей теории уравнений этого типа решение (5.1.25) имеет вид

$$\overline{\zeta}^* = P + \Theta(\lambda, \overline{\zeta}^*), \tag{5.1.26}$$

а в случае (5.1.24) можно положить

$$P = \frac{1}{\widehat{g}} C' - s^2\lambda) + \sum_{l=1}^{m} M_l u_l - \int_S Q(P, P_1) \frac{1}{\widehat{g}'} (C' - s'^2\lambda)\, d\sigma'. \tag{5.1.27}$$

Принимая во внимание (5.1.20) и (5.1.21), несложно видеть, что согласно (5.1.26)–(5.1.27) решения уравнения (5.1.12) выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} &\zeta_1 = P, \\ &\zeta_2 = P + \Theta(\lambda, \zeta_1), \\ &\zeta_3 = P + \Theta(\lambda, \zeta_2), \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

где Θ — сумма слагаемых второго и высших порядков. В соответствии с (5.1.18)

$$\widehat{g}\Theta = -\int_S \varkappa' N' \Theta'\, d\sigma' + \Psi(\lambda, \zeta). \tag{5.1.29}$$

Уравнение (5.1.18) эквивалентно основному уравнению задачи (5.1.12), если выполняются условия (5.1.19). Записав эти условия в виде

$$M_l + \int_S \varkappa' \widehat{g}' u_l' \zeta'\, d\sigma' = 0, \quad l = 1, 2, \dots, m, \tag{5.1.30}$$

несложно увидеть, что $M_1 = M_2 = 0$ из-за обращения в ноль u_1 и u_2. Очевидно, что для других значений индексов эти условия аналогичны условиям (4.2.4) теории Ляпунова, т. е. соответствуют в общем случае некоторым фигурам бифуркации. Таким образом, мы можем ожидать существования нового множества фигур равновесия в окрестности заданной фигуры, если эта фигура однородной жидкой массы принадлежит к особому множеству, определенному бифуркационными условиями.

5.2. Неоднородная масса

В четвертой главе своего труда Лихтенштейн рассмотрел некоторые новые неоднородные фигуры равновесия в окрестности заданной фигуры, которая может и не являться однородной. Эти исследования имеют общий характер и никогда не доводились до этапа фактических вычислений новых фигур типа определенных теорией Ляпунова. Закон плотности, использованный Лихтенштейном, имеет вид $\varkappa = h(\alpha) + \delta\chi(\alpha)$, т. е. он аналогичен (4.1.1). Кроме того, предполагается, что параметр δ принимает малые значения, т. е. это случай так называемых «слабо неоднородных» фигур. Когда первое слагаемое плотности является некоторой функцией от параметра α, то первичная фигура равновесия, т. е. фигура, в окрестности которой ищутся другие фигуры, будет неоднородной. Более того, плотность не должна быть непрерывна по всей жидкости. При наличии любых поверхностей разрыва интеграл Римана следует заменять интегралами Стилтьеса. Как упоминалось ранее, именно это сделал Ляпунов при обобщении задачи Клеро.

Представим главные этапы вывода основного уравнения этой теории.

Предположим, что все поверхности равной плотности пересекают ось z. Тогда расстояние q от точки пересечения до начала координат можно взять в качестве параметра, определяющего эти поверхности S_q, если их форма отличается от кольцеобразной. Тогда уравнение для S_q можно записать в виде

$$x = x(\xi, \eta, q), \quad y = y(\xi, \eta, q), \quad z = z(\xi, \eta, q). \tag{5.2.1}$$

Если V — объем некоторой начальной фигуры равновесия, плотность которой представлена выражением $\varkappa = h(\alpha)$, то на S_q будет выполняться условие

$$f \int\limits_V \frac{h'}{D}\, dV' + \frac{\omega^2 s^2}{2} = C(q) = \text{const}. \tag{5.2.2}$$

Если закон плотностей изменить на $\varkappa = h(\alpha) + \delta\chi(\alpha)$, для нового множества поверхностей равной плотности S_{1q} мы получим

$$x_1 = x + a\zeta, \quad y_1 = y + b\zeta, \quad z_1 = z + c\zeta, \tag{5.2.3}$$

и, поскольку изменилась также угловая скорость,

$$f \int\limits_{V_1} \frac{h' + \delta\chi'}{D_1}\, dV_1' + \frac{\omega_1^2 s_1^2}{2} = \text{const} = C_1(q). \tag{5.2.4}$$

Таким образом,

$$\begin{gathered} f \int\limits_{V_1} \frac{h'}{D_1}\, dV_1' - f \int\limits_V \frac{h'}{D}\, dV' + f\delta \int\limits_{V_1} \frac{\chi'}{D_1}\, dV_1' + \\ + \frac{\omega_1^2 s_1^2}{2} - \frac{\omega^2 s^2}{2} = C_1 - C = fC'(q). \end{gathered} \tag{5.2.5}$$

Лихтенштейн показал, что разность, представленную первыми двумя слагаемыми левого члена, можно разложить в равномерно сходящийся ряд

$$W_1 - W = W^{(1)} + W^{(2)} + \dots . \tag{5.2.6}$$

Свойства этого ряда во многом аналогичны свойствам рядов (5.1.8)–(5.1.9). Считалось очевидным, что новые поверхности равной плотности мало отличаются от начальных, и разность $\omega_1 - \omega$, безусловно, достаточно мала. Из-за непостоянства h уравнение (5.1.10) необходимо заменить более общим уравнением:

$$W^{(1)} = \zeta \frac{\partial W}{\partial n} + f \int\limits_{S_q} \frac{h'}{D} \zeta' \, d\sigma' - f \int\limits_{V} \zeta' \frac{\partial h'}{\partial n'} \frac{1}{D} \, dV'. \tag{5.2.7}$$

Это выражение справедливо для непрерывного h. Однако, если на поверхности S_* имеет место разрыв плотности, следует положить $[h'] = h(q^* + 0) - h(q^* - 0)$ и

$$W_*^{(1)} = W^{(1)} - f \int\limits_{S_*} [h'] \frac{\zeta'}{D} \, d\sigma'. \tag{5.2.8}$$

Согласно (5.2.5)–(5.2.8) получаем

$$\begin{aligned} &\zeta \frac{\partial W}{\partial n} + f \int\limits_{S} \frac{h'}{D} \zeta' \, d\sigma' - f \int\limits_{V} \zeta' \frac{\partial h'}{\partial n'} \frac{1}{D} \, dV' = fC' - W^{(2)} - W^{(3)} - \\ &- f\delta \int\limits_{V_1} \frac{\chi 6'}{D_1} \, dV_1' - f s^2 \lambda - \frac{\omega_1^2}{2} \zeta^2 (a^2 + b^2) - (\omega^2 + 2f\lambda)(ax + by). \end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Если вновь положить

$$\frac{\partial W}{\partial n} + \omega^2 (ax + by) = f\widehat{g},$$

основное уравнение задачи примет вид

$$\begin{aligned} &\widehat{g}\zeta + \int\limits_{S} \frac{h'}{D} \zeta' \, d\sigma' - \int\limits_{S_*} [h'] \frac{\zeta'}{D} \, d\sigma' - \int\limits_{V} \zeta' \frac{\partial h'}{\partial n'} \frac{1}{D} \, dV' = \\ &= C' - \delta \int\limits_{V_1} \frac{\chi'}{D_1} dV_1' - \lambda s^2 - \frac{\omega_1}{2f} \zeta^2 (a^2 + b^2) - 2\lambda\zeta(ax + by) - \\ &- \frac{1}{f} (W^{(2)} + W^{(3)} + \dots). \end{aligned} \tag{5.2.10}$$

В ходе общего обсуждения этого уравнения, представленного Лихтенштейном, нет моментов, принципиально отличающихся от положений, выдвинутых для случая однородной жидкости. Чтобы получить уравнение (5.1.12), справедливое для этого простого случая, в уравнение (5.2.10) нужно подставить

$$\frac{\partial h'}{\partial n'} = 0, \quad \chi = 0, \quad [h'] = 0.$$

В этом случае уравнение Клеро получается, если положить $\omega = 0$ ($\lambda \neq \neq 0$)[3]. Лихтенштейн предлагает взять четыре параметра: δ, λ, $C"(\overline{q})$ и M_3, где $\overline{q}$ — значение q, соответствующее свободной поверхности жидкости, и допустить, что эти параметры принимают малые значения, т. е. что их модули меньше некоторого заданного малого числа. Тогда для ζ разложение в степенной ряд

$$\zeta = \sum a_{\nu_1\nu_2\nu_3\nu_4} \lambda^{\nu_1} C'^{\nu_2} \delta^{\nu_3} M_3^{\nu_4} \tag{5.2.11}$$

можно будет использовать для вычисления новых фигур равновесия.

5.3. Некоторые другие результаты теории Лихтенштейна

Очевидно, что общую теорию, описанную в предыдущих разделах, можно применить к множеству задач, представляющих определенный интерес с точки зрения небесной механики. Именно поэтому Лихтенштейн рассмотрел фигуру жидкой массы, вращающейся в поле, созданном некими внешними массами, лапласову задачу о форме жидкости, окружающей жесткое сферическое ядро, а также задачу о жидком цилиндре и точной форме океана.

Основным моментом, отличающим решение всех этих задач, является форма заданной поверхности S в уравнении (5.1.14). В теории Ляпунова интеграл, присутствующий в этом уравнении, брался по единичной сфере, в силу чего собственные функции можно было выразить через сферические функции, или функции Ламе. В случае какой-либо другой поверхности S основная сложность, вероятно, будет заключаться в том типе функций, посредством которых собственные функции можно найти в виде, пригодном для дальнейшего обсуждения данной проблемы.

Новое дополнение к теории Ляпунова сделал Лихтенштейн [1] (глава V), применив созданный им метод к задачам такого типа. Предположим, что заданная фигура жидкой массы удовлетворяет условиям равновесия в первом приближении; найти же нужно точную фигуру равновесия в окрестности первой фигуры.

---

[3] Т. е. если начать с фигуры абсолютного равновесия.

Очевидно, что разность потенциалов двух таких тел можно разложить в ряд, аналогичный (5.2.6), поскольку для этой части анализа не требуется условия равновесия. Тогда мы можем определить функцию ζ, чтобы показать отклонение формы второго тела от первого. Вторая фигура удовлетворяет точным условиям равновесия, тогда как для первой мы имеем лишь первое приближение. Обозначим через ω угловую скорость фигуры равновесия. Предположим, что $\omega(\delta)$ — некоторая функция параметра δ, и рассмотрим множество фигур равновесия, соответствующее ей. Тогда, по методу, описанному в разделе 5.1, мы можем получить уравнение, аналогичное (5.1.12), с тремя параметрами C', λ и δ.

Очевидно, можно попытаться решить задачи такого рода для достаточно малых значений C', λ и δ. Однако нельзя забывать о существенной разнице между прикладным использованием этого метода и теорией, описанной в предыдущих разделах. Уравнение типа (5.1.12) получается при вычитании двух точных уравнений. Как и в новом случае, одно из этих условий справедливо *только в первом приближении*, о чем мы уже говорили выше.

Согласно Лихтенштейну, данный подход может представлять определенный интерес для следующих задач: (a) кольцеобразной фигуры равновесия, (b) кольца с телом, расположенным в центре, (c) вращения почти сферического тела вокруг материальной точки (тела, расположенного в центре), причем в качестве первичной фигуры можно выбрать эллипсоид Роша, (d) в частных случаях задачи n тел, когда они вращаются как твердотельная система вокруг общего центра масс и все имеют почти сферическую форму, (e) системы двойных или кратных звезд с центральным телом, (f) системы концентрических колец. В библиографии приводятся ссылки на исследования нескольких учеников Лихтенштейна, связанные с этими задачами и родственными вопросами.

5.4. Симметрия фигур равновесия

Все фигуры равновесия, существование которых было показано, а именно эллипсоиды Маклорена и Якоби и фигуры Пуанкаре–Ляпунова, имеют по меньшей мере одну плоскость симметрии. Эта плоскость перпендикулярна оси вращения. Существование данной плоскости является общим свойством фигур равновесия, и этот факт в общем виде впервые доказал Лихтенштейн [2].

Глава 6
Метод Вавра

6.1. Основные уравнения

Мы уже говорили о сложностях, связанных с разложениями в ряд коэффициента $1/D$ в выражении для потенциала, представленном формулами (1.4.13), а также имеющихся в трактате Тиссерана [1] (том II, стр. 317). Метод преодоления этих сложностей, названный «однородным методом», предложил Вавр. Чтобы получить основные уравнения, решение которых по этому методу дает фигуры равновесия, запишем сначала уравнение (1.1.5) в виде

$$\Phi(\varkappa) = fU + Q. \tag{6.1.1}$$

Очевидно, что при $\varkappa = \varphi(p)$ правый член уравнения (1.1.5) зависит только от плотности $\varkappa$. Более общее выражение для Q мы получим в следующей главе, однако в случае фигур равновесия Q является линейной функцией от s^2, в силу чего $\nabla^2 Q = 2\omega^2$. Допустим, что Φ и ее дифференциальные коэффициенты первых двух порядков непрерывны в пространстве V, заполненном жидкой средой, и что Φ является аналитической функцией в той части пространства, которая является внешней по отношению к V. Если принять во внимание уравнение Пуассона для потенциала U, из (6.1.1) следует

$$\nabla^2\Phi = -4\pi f\varkappa + 2\omega^2. \tag{6.1.2}$$

Предположим, что Φ на границе S имеет постоянное значение Φ_S. Чтобы найти выражение для значения Φ_M в некоторой точке M, необходимо использовать формулу Грина в двух разных случаях. Предположим, что M — внешняя точка, а $D = MM'$ — расстояние от этой точки до точки M' тела. Тогда мы имеем

$$\int\limits_V \left(\frac{1}{D}\nabla^2\Phi - \Phi\nabla^2\frac{1}{D}\right)dV + \int\limits_S \left(\frac{1}{D}\frac{d\Phi}{dn} - \Phi\frac{d}{dn}\frac{1}{D}\right)dS = 0,$$

если взять внутреннюю нормаль. Поскольку $\nabla^2(1/D) = 0$, а в последнем члене $\Phi = \Phi_s = \mathrm{const}$, интеграл Гаусса равен нулю, и уравнение принимает вид

$$\int\limits_V \frac{1}{D}\nabla^2\Phi\, dV + \int\limits_S \frac{1}{D}\frac{d\Phi}{dn}\, dS = 0. \tag{6.1.3}$$

Это уравнение справедливо для внешней части пространства и на пограничной поверхности. Если M — внутренняя точка, а σ — произвольная малая сфера с центром в точке P, поверхностный интеграл в формуле Грина берется по S и σ. Он даст два слагаемых, интеграл Гаусса для каждого из которых равен 4π. Таким образом, мы получаем

$$\int\limits_V \frac{1}{D}\nabla^2\Phi\, dV + \int\limits_S \frac{1}{D}\frac{d\Phi}{dn}\, dS = 4\pi(\Phi_S - \Phi_M), \tag{6.1.4}$$

и это уравнение справедливо как на границе, так и во внутренней области. Подставляя (6.1.2) в первый член уравнения (6.1.3) или (6.1.4) и принимая во внимание, что

$$U = \int\limits_V \frac{\varkappa\, dV}{D},$$

мы получаем

$$\int\limits_V \frac{1}{D}\nabla^2\Phi\, dV + = -4\pi f U + 2\omega^2 \int\limits_V \frac{dV}{D}.$$

Согласно (6.1.1) мы имеем $\Phi_M = fU_M + Q_M$, в силу чего уравнения (6.1.3) и (6.1.4) можно записать в симметричном виде:

$$\frac{\omega^2}{2\pi}\int\limits_V \frac{dV}{D} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_S \frac{1}{D}\frac{d\Phi}{dn}\, dS + Q_P = \begin{cases} \Phi_M \\ \Phi_S \end{cases}. \tag{6.1.5}$$

Если взять любую поверхность уровня S_*, потенциал U можно представить суммой

$$U = U_1 + U_2 = \int\limits_{V_*} \frac{\varkappa\, dV}{D} + \int\limits_L \frac{\varkappa\, dV}{D}, \tag{6.1.6}$$

где V_* — объем, ограниченный поверхностью уровня S_*, а L — пространство между S и S_*. Очевидно, что если S_* — внешняя поверхность, то плотность $\varkappa$ в слое L должна приниматься равной нулю. Применяя формулу (6.1.5) к первому члену в (6.1.6), получаем уравнение

$$f\int_L \frac{\varkappa}{D}\,dV + \frac{\omega^2}{2\pi}\int_{V_*}\frac{dV}{D} + \frac{1}{4\pi}\int_{S_*}\frac{1}{D}\frac{d\Phi}{dn}\,dS + Q_M = \begin{cases}\Phi_M\\ \Phi_{S_*}\end{cases}. \tag{6.1.7}$$

В таком виде Вавр представил необходимое и достаточное условие равновесия. Что касается распределения плотности, предполагалось, что плотность в фигуре равновесия не уменьшается в центральном направлении. Мы уже рассмотрели это предположение в разделе (1.3). Второе уравнение (6.1.7) представляет собой условие, которое должно выполняться на любой поверхности уровня S_* во внутренней области вращающейся жидкой массы, а его решение определит не только стратификацию во внутренней области жидкой массы, но и свободную поверхность, являющуюся фигурой равновесия. Чтобы решить это уравнение, Вавр предложил следующее преобразование. Поскольку $d\Phi/dn = g$, второе уравнение (6.1.7) можно записать в виде

$$\frac{1}{4\pi}\int_{S_*}\frac{g\,dS}{D} + f\int_L \frac{\varkappa}{D}\,dV + \frac{\omega^2}{2\pi}\int_{V_*}\frac{dV}{D} + Q_M - \Phi_{S_*} = 0. \tag{6.1.8}$$

Теперь первый член можно интерпретировать как потенциал простого слоя на границе S_* «полости» с плотностью, равной g. Во внутренней области S_* все члены в (6.1.8) являются аналитическими функциями. Таким образом, левый член уравнения (6.1.8) будет определяться разложением в ряд Тейлора, например, его значение в окрестности центра. Чтобы получить это выражение, объем V_* рассматриваемой полости делится на две части. Тогда третий член уравнения (6.1.8) можно представить в виде суммы. Сначала мы берем интеграл по сфере радиуса q_*, равного расстоянию до точки пересечения поверхности с осью вращения. Он остается интегралом по пространству K между этой сферой и поверхностью S_*. Если через R обозначить расстояние до точки P в «полости», а через θ — угол $(\mathbf{R}, \boldsymbol{\omega})$, получится

$$\int_{V_*}\frac{dV}{D} = 2\pi\left[q_*^2 - \frac{R^2}{3}\right] + \int_K \frac{1}{D}\,dV. \tag{6.1.9}$$

Если точка M достаточно близка к C при заданной S_* (в общем случае произвольной), мы можем использовать второе лапласово разложение $1/D$

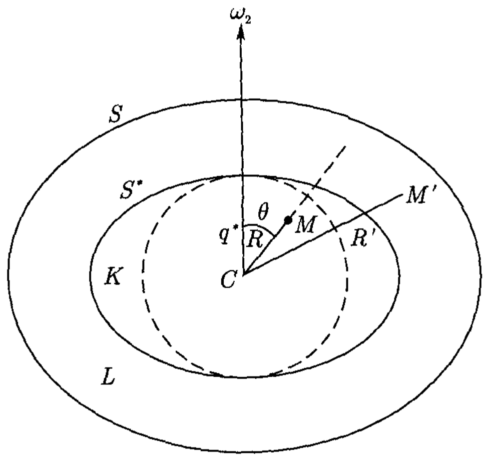


Рис. 6

в ряд (1.4.13). Вообще, при $R < R'$ в

$$\frac{1}{D} = \frac{1}{R'} \sum_{0}^{\infty} \left(\frac{R}{R'}\right)^n P_n(\overline{\mu})$$

последнее условие справедливо для всех трех интегралов в (6.1.8), причем выражение (6.1.9) подставляется в уравнение (6.1.8). В этих уравнениях через R' обозначено расстояние от любого элемента интегралов до C и $\overline{\mu} = \cos M'CM$. Если мы сейчас примем условия обнуления коэффициентов при всех R^n в (6.1.8), то получим

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4\pi} \int\limits_{S_*} \frac{P_n g}{R'^{n+1}}\, dS + f \int\limits_{L} \frac{P_n \varkappa}{R'^{n+1}}\, dV \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \Phi_s - \omega^2 q_*^2 \quad \text{при} \quad n = 0 \\ &+\frac{\omega^2}{2\pi} \int\limits_{K} \frac{P_n}{R'^{n+1}}\, dV = \frac{\omega^2}{3} P_2(\overline{\mu}), \qquad n = 2, \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 0 \qquad\qquad n = 1, 3, 4, 5, \ldots, \end{aligned} \tag{6.1.10}$$

поскольку

$$Q_P = \frac{\omega^2 R^2 \sin^2 \vartheta}{2} = \frac{\omega^2 s_P^2}{2}, \quad P_2(\cos\vartheta) = \frac{3}{2}\cos^2\vartheta - \frac{1}{2}.$$

Эту систему необходимо дополнить уравнением, легко получающимся из (6.1.2). Если последнее уравнение проинтегрировать по всему объему жидкой массы, правый член принимает вид $-4\pi f m + 2\omega^2 V$, где m — общая масса. Поскольку левый член уравнения можно преобразовать в поверхностный интеграл по формуле Грина, мы получим уравнение Пуанкаре[1]

$$\int\limits_S g\,dS = 4\pi f m - 2\omega^2 V.$$

Если аналогичное преобразование применить к уравнению (6.1.2) и взять объем V_*, то в качестве дополнительного условия несложно получить уравнение

$$\frac{1}{4\pi}\int\limits_{S_*} g\,dS + f\int\limits_L \varkappa\,dV + \frac{\omega^2}{2\pi}\int\limits_K dV = fm - \frac{2}{3}\omega^2 q_*^3. \tag{6.1.11}$$

6.2. Схемы решений

Записанные в виде (6.1.10) и (6.1.11) уравнения еще не выражены через те переменные, которые необходимо определить. В выборе таких переменных метод Вавра отличается от описанных в предыдущих разделах. Поверхности уровня S_* в этом методе представлены в параметрическом виде уравнениями

$$\begin{aligned} x = R\sin\vartheta\cos\psi, \quad y = R\sin\vartheta\sin\psi, \quad & z = R\cos\vartheta, \\ & R = R(q_*, \vartheta, \psi). \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Таким образом, выдвигается предположение, что множество поверхностей уровня определяется параметром q_*. Он соответствует множеству концентрических сфер радиуса q_*, изменяющегося от нуля до некоторого значения, заданного для свободной поверхности жидкой массы.

Условия (6.1.10) и (6.1.11) можно преобразовать с целью введения переменных R, ϑ, ψ, однако при использовании общего вида функции

[1] Из этого уравнения Пуанкаре получил верхний предел угловой скорости. Если частицы на свободной поверхности фигуры равновесия не разделены, g не имеет отрицательных значений на S. Обозначив $\varkappa_m = m/V$ как среднюю плотность, мы получаем из этого уравнения $\omega^2 < 2\pi f \varkappa_m$. Нижнее значение данного предела ($\omega^2 < \pi f \varkappa_m$) при определенных условиях, связанных с регулярностью поверхности S, нашли Крудели [2] и Никлиборк [1]. Крудели также доказал [3, 4] еще одно неравенство, ограничивающее наибольшее допустимое значение ω. См. также Прасад [1].

$R(q_*, \vartheta, \psi)$ особых успехов мы не добьемся. Тогда Вавр предположил, что

$$R = q_*(1+\zeta), \tag{6.2.2}$$

где функцию $\zeta = \zeta(q_*, \vartheta, \psi)$ можно разложить в ряд

$$\zeta = \omega^2\zeta^{(1)} + \omega^4\zeta^{(2)} + \ldots. \tag{6.2.3}$$

Эти предположения позволяют нам сравнить результаты, которых можно ожидать, применяя как метод Вавра, так и методы, предложенные другими исследователями. Подставляя (6.2.2) в (6.2.1), мы получаем параметрическое представление поверхностей уровня, отличных от (4.1.2), использованного Ляпуновым, или (5.1.1) Лихтенштейна. Параметр q_* соответствует случаю сфероидов.

Если в уравнении (4.1.2) не брать неравные оси, а положить радиус граничной поверхности равным $\sqrt{\varrho}$, то из (6.2.1) и (6.2.2) следует, что $q_* = a\sqrt{\varrho}$. Уравнения (4.1.2) представляют поверхности уровня в окончательном виде, который Ляпунов принял после того, как попробовал использовать ряд других в своих первых исследованиях. Он осознал, что этот вид очень удобен для точного доказательства фигур равновесия, совсем немного отличающихся от эллипсоидов. Для закона плотности (4.1.1) функцию ζ, выражающую отклонение таких поверхностей уровня от эллипсоидов, можно разложить в ряд (4.3.19). Таким образом, результаты, полученные Ляпуновым, справедливы для любой угловой скорости, определяющей форму эллипсоида, и для некоторого малого, но конечного отклонения от однородности, поскольку δ не принимается бесконечно малой. Аналогичный подход присутствует в методе Лихтенштейна, где используется другой параметр (λ). Он определяется первым уравнением (5.1.11) и может использоваться в случае однородной жидкости, где δ в законе плотности как у Ляпунова, так и у Лихтенштейна тождественно равна нулю. Вавр же, используя ряд (6.2.3), ограничивается фигурами, лишь немного отличающимися от сферы. Как уже говорилось в разделе 2.3, в теории Клеро были оставлены лишь слагаемые порядка ω^2, причем это же допущение использовалось в ряде других исследований. Рассмотрев это допущение в качестве первого приближения, Вавр использовал функцию ζ в том виде, который представлен уравнением (6.2.3). Используя преобразованные уравнения (6.1.10) и (6.1.11), он показал, что с помощью последовательных приближений множество функций $\zeta^{(1)}$, $\zeta^{(2)}$ (аналогичных функции ζ_i из теории Ляпунова) можно выразить через параметр q_* и сферические углы, если, конечно, задана функция плотности $\varkappa = \varkappa(q_*)$.

Функция Вавра[2] ζ выражает деформацию поверхности уровня относительно сферы радиуса q_*, и фактическое вычисление двух первых приближений дает фигуры вращения. При вычислении первого приближения Вавр получил классические результаты. Из (5.1.11) несложно увидеть, что, если первичной фигурой равновесия является сфера, т. е. если положить $\omega = 0$, параметр λ становится пропорционален ω_1^2, а ω_1 как раз и является фактической угловой скоростью искомой фигуры равновесия. Таким образом, в этом отношении ряд (6.2.3) становится частным случаем более общих разложений, использованных Лихтенштейном (см., например, (5.2.11)). В методе Вавра фактические вычисления в некоторой степени проще, чем вычисления в методах Ляпунова и Лихтенштейна. Однако последние имеют более общий характер и отличаются более высокой точностью.

6.3. Другие исследования

Некоторые модификации метода Вавра предложил Минео [3], пытавшийся упростить последовательные приближения. Потенциал стратифицированного неоднородного тела вновь был разложен в ряд по четным степеням угловой скорости. Другие разложения потенциала, силы тяжести и радиуса свободной поверхности Земли по функциям Лежандра Минео [1,4] использовал для определения фигуры планеты при известных значениях силы тяжести на свободной поверхности. Минео также упростил [5] данное Вавром доказательство невозможности гомотетической стратификации во вращающейся равновесной жидкой массе. Случай строго эллипсоидальной стратификации, в которой эллиптичность изменяется от центра к поверхности, Вавр рассмотрел в более поздней публикации [2], а Див этот случай обобщил [3]. Точная эллипсоидальная стратификация в жидком теле невозможна, если $\varkappa = \varphi(p)$ и вращение постоянно. Другие результаты, связанные с фигурами небесных тел, Вавр получил не в прямой связи со своим методом. Мы упомянем лишь о распространении метода Стокса на случай, в котором угловая скорость является функцией от расстояния s до оси вращения. В этой форме теорема звучит следующим образом: ньютоновский потенциал в пространстве, внешнем по отношению к небесному телу, зависит на свободной поверхности (S) только от угловой скорости $\omega(s)$ и общей массы (M). С помощью этой теоремы Круделли [3] вывел интегральное уравнение, из которого можно определить силу тяжести на поверхности.

---

[2]Функция ζ является функцией e в обозначении Вавра.

Часть II

Другие неизменяемые или изменяющиеся фигуры

Глава 7

Зональное вращение

7.1. Общие результаты, касающиеся зонального вращения

Теория фигур равновесия жидкой массы позволила объяснить многие характеристики небесных тел. Благодаря наивысшей степени точности в математических методах, использованных для доказательства существования фигур равновесия, эта теория получила наиболее прочную основу. Однако в теории небесных тел существует ряд явлений, которые требуют распространения данной теории на состояния, отличающиеся от равновесного. Как упоминалось ранее, в настоящее время так называемое зональное вращение в нашей Солнечной системе наблюдается на Солнце, Юпитере и Сатурне. Известно, что в некоторых туманностях вращение происходит по закону, который отличается от закона, действующего для Солнца. Зональный характер вращения солнечных пятен, вплоть до гелиоцентрической широты $\vartheta_h = \pm 35°$, которую открыл Каррингтон, весьма адекватно представляет закон Фейе (1880):

$$\omega = a + b \sin^2 \vartheta_h \qquad (a = 14°.44, \quad b = -2°.31). \tag{7.1.1}$$

Этот эмпирический закон применим и к других движениям в атмосфере Солнца, а это свидетельствует о том, что в общем случае угловая скорость ω на поверхности увеличивается вместе с расстоянием от частицы до оси вращения. Для аналогичного явления, наблюдаемого на Юпитере или Сатурне, такого закона нет.

Проблема зонального вращения поднималась в ходе теоретических исследований неоднократно[1]. Начатые с целью объяснения закона Фейе о зональном вращении Солнца, эти исследования были распространены на самые разные аспекты проблемы, равно как и на условия общей циркуляции вещества в небесном теле. Последняя проблема максимально подробно обсуждалась в работах Джинса [3] и Васютинского [1]. Столь подробное

[1]Наиболее полные перечни этих исследований представили Ярдецкий [4] и Васютинский [1].

обсуждение выходит за рамки нашего исследования. Однако ряд соответствующих данных будет приведен в разделе 7.4. Важно отметить, что на текущий момент не существует полного согласия на предмет того, какое физическое явление могло бы вызывать и поддерживать зональное вращение в небесном теле, (см., например, Ярдецкий [13]). Тем не менее эту теорию принято считать вторым приближением для случая вращающейся жидкой массы, когда первое приближение, в основе которого лежит предположение о простом равновесии, не способно обеспечить полное объяснение.

В первых попытках создания теории зональных вращений использовались уравнения движения вязкой жидкости. Вилсинг (в 1891, 1896 гг.) предложил гипотезу, согласно которой ядро Земли вращается с постоянной угловой скоростью, а во внешнем слое распределение ω происходит согласно закону $\omega = \mathrm{funct}(s, z)$, где s — расстояние от оси. Возможность законов $\omega = \omega(s^2)$ или $\omega = \omega(z, s^2)$, равно как и кругового движения в вязкой жидкости, также исследовали Сэмпсон (1894 г.), Харзер (1891–1897 гг.) и Вильчинский (1896–1897 гг.) (см. Ярдецкий [4]).

Постоянные и зональные вращения в идеальной жидкости рассматривали Вероне [1–3], Вавр [1], Дайв [1, 2], Ярдецкий [1–4] и другие авторы.

Самая важная задача, которая рассматривалась во множестве работ, заключалась в нахождении стратификации. В некоторых таких исследованиях были получены условия, при которых можно было бы ожидать существования данной стратификации. Так, Харзер пришел к выводу, что эллипсоиды вращения могут быть поверхностями равной плотности в вязкой жидкости, имеющей зональное вращение (см. также Дайв [2], Даноз [1]). Прямой способ определения фигуры жидкой массы при заданном законе вращения, т. е. при выражении угловой скорости через координаты, использовали Вавр и Ярдецкий.

7.2. Основное уравнение

Функция $Q = (\omega^2 s^2)/2$, вводимая в уравнение (6.1.1), представляет собой частный вид потенциала ускорений, что несложно увидеть из уравнений (1.1.2) и (1.1.5). Тогда очевидно, что уравнение

$$fU + Q = \int \frac{dp}{\varkappa} + \mathrm{const} \tag{7.2.1}$$

будет справедливо для общего случая, в котором существует потенциал ускорений ($\mathbf{a} = -\operatorname{grad} Q$). Пока не накладываются какие-либо другие условия, мы можем постулировать любое распределение ускорений в жидкой массе. Например, мы можем предположить, что вращение происходит по закону

$$\omega = \omega(s^2) \quad \text{или} \quad \omega(s^2, z). \tag{7.2.2}$$

В первом случае при умножении уравнений (1.1.3) на dx, dy, dz соответственно, и последующем их сложении мы получаем слагаемое $-\omega^2\, ds^2$ $(s^2 = x^2 + y^2)$. Таким образом,

$$Q = \int \omega(s^2)\, ds^2. \tag{7.2.3}$$

Уравнение вида (7.2.2) называется законом вращения. Для любого вида этого закона, отличного от соответствующего относительному равновесию, мы можем применить один из методов, обсуждаемых в предыдущих главах. Задача о фигурах масс, движение которых подчиняется заданному закону вращения, можно свести к основному уравнению рассмотренного ранее типа с единственным изменением, затрагивающим слагаемое, представляющее центробежную силу. Так, например, если ограничиться первым законом (7.2.2), функциональное уравнение, решения которого определят фигуры заданной жидкой массы, в общем виде будет выглядеть следующим образом:

$$fU + \int \omega(s^2)\, ds^2 = \Phi(\varkappa). \tag{7.2.4}$$

Это уравнение невозможно решить, не вводя новых допущений. Мы должны использовать ряд известных представлений потенциала U и выбрать определенный закон вращения. Если предположить, что распределение угловых скоростей в массе существенно не отличается от постоянного значения ω, можно ожидать, что новая фигура жидкости представляет собой несколько деформированную фигуру равновесия. Правильность или ошибочность этого предположения, безусловно, должна доказываться в процессе рассмотрения всех условий задачи. Одно из таких условий получается непосредственно из свойств жидкости. Если плотность $\varkappa$ постоянна или является функцией одного только давления ($\varkappa = \varphi(p)$), то уравнение (1.1.2) показывает, что ускорение (7.2.1) имеет потенциал. Если считать, что движение сводится к чистому вращению вокруг неподвижной оси (z), то из уравнений (7.2.2) следует, что

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = -\omega^2 x, \qquad \frac{\partial Q}{\partial y} = -\omega^2 y, \qquad \frac{\partial Q}{\partial z} = 0,$$

т. е. ω не может зависеть от z. Закон вращения имеет вид первого уравнения (7.2.2)[2].

Вавр и Даноз применили однородный метод, который обсуждался в шестой главе, к зональным вращениям, определенным законом

$$\omega^2 = a + bs^2, \tag{7.2.5}$$

где обе постоянные, a и b, имеют малые значения. Случай, который рассмотрел Ярдецкий, носит более общий характер из-за вида закона вращения. Ярдецкий предположил, что

$$\omega = \omega_0 + \omega_1(s^2, \lambda), \tag{7.2.6}$$

где: а) ω_0 может иметь любое конечное значение; b) только параметр λ принимает малые значения; с) функция ω_1 такова, что функция Q может быть представлена абсолютно сходящимся рядом

$$Q(s^2, \lambda) = \frac{\omega_0^2 s^2}{2} + f \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(s^2)\lambda^k. \tag{7.2.7}$$

Область сходимости задается условиями

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_1, \quad 0 \leqslant s \leqslant s_m, \tag{7.2.8}$$

где λ_1 — некоторое предельное значение, а s_m — максимальное расстояние до оси частицы на свободной поверхности.

Кроме того, как функция

$$Q'' = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(s^2)\lambda^k, \tag{7.2.9}$$

так и ее первые производные по координатам не должны превышать $A_1\lambda_1^2$, где A_1 — некоторая постоянная.

Очевидно, закон Фейе (7.1.1) соответствует простейшему случаю (7.2.6), а именно

$$\omega = \omega_0 + \lambda s^2,$$

[2]Для второго закона (7.2.2) не будет справедливо ни одно уравнение вида (7.2.4) (Бьеркнес [1]). Некоторые авторы пытались определить закон вращения $\omega(x, y, z)$, соответствующий заданной характеристике распределения плотности, например эллипсоидальной стратификации (метод Дайва [2] для постоянных вращений).

поскольку ω_0 не обязательно мала. Это также более общая форма, чем закон (7.2.5). При таких допущениях фигуры вращающейся жидкой массы, мало отличающиеся от эллипсоида, из-за зонального характера вращения можно определить с помощью метода Ляпунова для однородной, а также для немного неоднородной массы. Подставляя новое значение (7.2.7) потенциала ускорения в уравнении (4.3.3) теории Ляпунова, мы получаем

$$\sum_{i=0}^{\infty} U_i + \frac{\omega_0^2}{2f} s^2 + \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \lambda^k = \mathrm{funct}(a). \tag{7.2.10}$$

Предположив снова, что поверхности уровня имеют форму, определенную функцией ζ и представленную уравнениями (4.1.2) или (4.3.1)–(4.3.2), мы можем использовать разложение ньютоновского потенциала в ряд (4.1.15). Преобразование этого ряда, дающее уравнение (4.3.16), применимо к (7.2.10). Тогда окончательным результатом будет уравнение

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{\overline{\zeta}' d\sigma'}{D(a,1)} = \widehat{W} + P(a), \tag{7.2.11}$$

где

$$\widehat{W} = W + \frac{1}{4\pi a^2 \Delta} \sum_{k=1}^{\infty} Q_k \lambda^k, \tag{7.2.12}$$

и W задается уравнением (4.3.17). Функция $P(a)$ определяется формулой (4.3.18).

В этих уравнениях непонятно, можно ли использовать в качестве эталонной фигуры эллипсоид вращения или эллипсоид с тремя неравными осями. Однако предположительно постоянное вращение ограничивает выбор эталонной фигуры (Пицетти [1]). Для жидкости мы имеем уравнение непрерывности

$$\frac{d\varkappa}{dt} + \varkappa \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Поскольку движение постоянно, $\partial \mathbf{v}/\partial t = 0$ и $\partial \varkappa/\partial t = 0$. Таким образом, мы имеем

$$\mathbf{v} \cdot \operatorname{grad} \varkappa + \varkappa \operatorname{div} \mathbf{v} = 0.$$

Если закон вращения имеет вид $\omega = \omega(s^2)$, а $\mathbf{v}$ задается уравнением (1.1.1), то

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = -y\frac{\partial \omega}{\partial x} + x\frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{2}\frac{D(s^2,\omega)}{D(x,y)} = 0,^{3} \tag{7.2.13}$$

[3]Таким образом, уравнению (7.2.13) непременно удовлетворяет несжимаемая жидкость, однако обратное утверждение неверно.

и мы получаем условие

$$\mathbf{v}\cdot \operatorname{grad} \varkappa = 0. \tag{7.2.14}$$

Поверхности равной плотности должны быть поверхностями вращения.

Функция ζ, выражающая стратификацию в жидкой массе, должна удовлетворять уравнению (7.2.11) и условию (4.1.6):

$$\int \zeta d\sigma = -\int \zeta^2 d\sigma - \frac{1}{3}\int \zeta^3 d\sigma. \tag{7.2.15}$$

Это условие необходимо для определения произвольной функции параметра a, введенного в выражение P.

7.3. Фигуры, лишь немного отличающиеся от эллипсоидов

Чтобы решить уравнение (7.2.11), предположим, что ζ можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся ряд

$$\zeta = \sum_{i+j>0}^{\infty} \zeta_{ij}\delta^i\lambda^j, \tag{7.3.1}$$

где ζ_{ij} — функции от a и ϑ. Поскольку правый член уравнения (7.2.11) зависит также от обоих параметров δ и λ, его необходимо разложить в ряд, аналогичный (7.3.1), в силу чего мы полагаем

$$\widehat{W} = \sum \widehat{W}_{ij}\delta^i\lambda^j, \tag{7.3.2}$$

где $\widehat{W}_{ij}$ — функции от a и ϑ ($\widehat{W}_{00} = 0$). Подставляя (7.3.1) и (7.3.2) в (7.2.11), получаем систему уравнений

$$R\zeta_{ij} - \frac{1}{4\pi a^2}\int \frac{\overline{\zeta}'_{ij}\, d\sigma'}{D(a,1)} = \widehat{W}_{ij} + f_{ij}(a), \tag{7.3.3}$$

которым должны удовлетворять коэффициенты ζ_{ij}. Функции $f_{ij}(a)$ неизвестны, но другая система уравнений, полученная из (7.2.15), поможет нам найти эти функции. Другими словами, мы имеем

$$\int \sum \zeta_{ij}\delta^i\lambda^j\, d\sigma = -\int (\sum \zeta_{ij}\delta^i\lambda^j)^2 d\sigma - \frac{1}{3}\int \left(\sum \zeta_{ij}\delta^i\lambda^j\right)^3 d\sigma.$$

Следовательно,

$$\int \zeta_{10}\,d\sigma = 0, \qquad \int \zeta_{01}\,d\sigma = 0, \qquad \int \zeta_{20}\,d\sigma = -\int \zeta_{10}^2\,d\sigma, \ldots \tag{7.3.4}$$

Каждый интеграл

$$N_{ij} = \int \zeta_{ij}\,d\sigma \tag{7.3.5}$$

можно выразить через эти функции ζ_{kl}, для которых $k+l$ меньше $i+j$. Таким образом, далее можно вычислить N_{ij}.

Если (7.3.3) умножить на $d\sigma$ и проинтегрировать по единичной сфере, уравнение

$$RN_{ij} - \frac{1}{4\pi a^2}\int \overline{\zeta}'_{ij}\,d\sigma' \int \frac{d\sigma}{D(a,1)} = \widehat{W}_{ij}\,d\sigma + 4\pi f_{ij}(a) \tag{7.3.6}$$

примет вид (4.3.23). Принимая во внимание значение (4.3.27) второго интеграла во втором слагаемом и исключая f_{ij} из (7.3.3) и (7.3.6), мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} R\zeta_{ij} - \frac{1}{4\pi a^2}\int \overline{\zeta}'_{ij}\left(\frac{1}{D(a,1)} - \frac{1}{a}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)d\sigma' = \\ = \widehat{W}_{ij} - \frac{1}{4\pi}\int \widehat{W}_{ij}\,d\sigma + \frac{1}{4\pi}RN_{ij}. \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

Теперь выражение $\widehat{W}$ (7.2.12) начинается со слагаемого порядка ζ^2. Тогда коэффициенты $\widehat{W}_{ij}$ будут зависеть только от тех функций, которые имеют индексы, подчиняющиеся тому же условию $k+l<i+j$, что и N_{ij}. В уравнении (7.3.7) мы имеем функцию ζ_{ij}, которую нужно определить для некоторого диапазона значений параметра a и угла ϑ. Во втором слагаемом присутствует значение $\overline{\zeta}'_{ij}$. Оно берется при $a=1$, т. е. для свободной поверхности жидкости. Таким образом, естественный способ определения этой функции заключается в том, чтобы вновь положить в (7.3.7) $a=1$, что позволит решить интегральное уравнение

$$R\zeta_{ij} - \frac{1}{4\pi}\int \frac{\overline{\zeta}'_{ij}\,d\sigma'}{D(1,1)} = \overline{W}_{ij} + \mathrm{const} \tag{7.3.8}$$

и подставить функцию $\overline{\zeta}'_{ij}$ в (7.3.7). Черта над символом, как и ранее, обозначает значение выражения при $a=1$. Несложно увидеть, какие слагаемые в (7.3.7) после подстановки $a=1$ дают постоянное слагаемое (7.3.8).

N_{ij} представлены интегралами (7.3.5) и являются функциями только от a. То же касается и слагаемых $-1/4\pi \int \widehat{W}_{ij}\,d\sigma$. Теперь, чтобы преобразовать третье слагаемое левого члена уравнения (7.3.7) при $a = 1$, в (4.3.28) следует положить $a = 1$ и $\varrho = t = \varepsilon$; тогда это слагаемое имеет вид

$$\frac{1}{4\pi}\int \overline{\zeta}'_{ij}\,\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{\sqrt{\varrho}}\,d\sigma' = \mathrm{const}, \qquad \int \overline{\zeta}'_{ij}\,d\sigma' = \mathrm{const}, \qquad \overline{N}_{ij} = \mathrm{const}.$$

Следовательно, функцию ζ (7.3.1) можно вычислить последовательными приближениями, решая двойную систему уравнений (7.3.7) и (7.3.8), которые дают функции

$$\zeta_{ij} = \zeta_{ij}(a, \vartheta), \qquad \overline{\zeta}_{ij}(1, \vartheta). \tag{7.3.9}$$

Согласно первым условиям (7.3.4) мы имеем

$$N_{10} = N_{01} = 0. \tag{7.3.10}$$

В соответствии с (7.2.12) и (4.3.17) несложно увидеть, что

$$\begin{aligned} \widehat{W}_{10} &= \frac{1}{4\pi a^2\Delta}[\Phi_0 - \Phi_0(0)], \\ \widehat{W}_{01} &= \frac{1}{4\pi a^2\Delta}Q_{01}(a, \vartheta). \end{aligned} \tag{7.3.11}$$

Последнее выражение получается, если использовать тот факт, что Q_k в (7.2.12) являются функциями от s^2. Поскольку $s^2 = x^2 + y^2 = a^2(1 + \zeta)^2(\varrho + 1)\sin^2\vartheta$ на поверхности уровня, Q_k зависят от ζ, т. е. и от параметра δ. Таким образом, мы должны положить

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k\lambda^k = \sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} Q_{\mu\nu}\delta^\mu\lambda^\nu. \tag{7.3.12}$$

Как и в задаче о фигурах равновесия, выражения Φ_0 и $\Phi_0(0)$ получаются при подстановке $\varkappa' = \varphi(a')$ в соответствующие слагаемые ньютоновского потенциала U (см. (7.2.15)) и (4.1.17). Тогда прямое вычисление дает (Ярдецкий [4])

$$W_{10} = \frac{1}{a^2}\int_0^a \varphi(a')a'(\mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\varrho} - \mathrm{tg}^{-1}\sqrt{\varepsilon})\,da', \tag{7.3.13}$$

где ε' является положительным корнем уравнения по t,

$$\frac{\varrho+1}{t+1}\sin^2\vartheta + \frac{\varrho}{t}\cos^2\vartheta = \left(\frac{a'}{a}\right)^2. \tag{7.3.14}$$

В общем случае, если дан закон плотности, функции $\varphi(a)$, W_{10} можно разложить в ряд сферических функций с коэффициентами, которые будут зависеть от a. Ляпунов [9] (часть I, с. 27–34, 66–98) показал, что при этих условиях функцию ζ_{10} можно представить рядом вида

$$\zeta_{10} = \sum Z_{2n}, \tag{7.3.15}$$

где сферическая функция Z_{2n} задается уравнением

$$\begin{aligned} Z_{2n} &= \frac{P_{2n}(\overline{\mu})}{\gamma_{2n}} \int W_{10} P_{2n}(\overline{\mu})\, d\sigma, \\ \gamma_{2n} &= \frac{4\pi}{4n+1}, \quad \overline{mu} = \cos\vartheta, \end{aligned} \tag{7.3.16}$$

а $P_{2n}(\overline{\mu})$ являются полиномами Лежандра. Ярдецкий [3] доказал, что функцию ζ_{01} можно представить рядом

$$\zeta_{01} = \sum \beta_{2n} P_{2n}(\overline{\mu}), \tag{7.3.17}$$

причем два последних результата сопряжены со сложными и чрезвычайно долгими вычислениями, необходимыми для определения выражения ζ_{ij} через координаты.

Если ограничиться первым приближением

$$\zeta_1 = \zeta_{10}\delta + \zeta_{01}\lambda, \tag{7.3.18}$$

при подстановке некоторых частных законов плотности и вращения можно использовать два известных общих выражения (7.3.15) и (7.3.17). Ляпунов вычислил ζ_{10} в случае, когда $\varphi(a)$ является полиномом по a^2 в степени k. Чтобы найти фигуру жидкой массы в случае зонального вращения, Ярдецкий использовал закон плотности

$$\varkappa = 1 + \delta\varphi(a) = 1 + \delta(H_1 a^2 + H_2), \tag{7.3.19}$$

где H_1 и H_2 — постоянные, и предположил, что

$$\omega = \omega_0 + \lambda s^2, \tag{7.2.6$'$}$$

т. е. что закон вращения принадлежит к типу законов Фейе. Выбирая единственное слагаемое (7.3.18), мы, очевидно, принимаем, что параметры δ и λ

имеют один порядок. В противном случае слагаемые по δ и λ следует объединять иначе. После обширных преобразований (Ярдецкий [4, с. 48–59]) уравнение свободной поверхности жидкой массы, которое в общем случае задается формулой (4.3.2), можно записать в виде

$$\frac{x^2+y^2}{\varrho+1}+\left(\frac{1}{\varrho}-2L_2\delta-K_2\lambda\right)z^2-(2L_4\delta+K_4\lambda)z^4= \\ =1+2L_0\delta+K_0\lambda, \tag{7.3.20}$$

где L_i, K_i — постоянные, а $\sqrt{\varrho+1}$, $\sqrt{\varrho+1}$ и $\sqrt{\varrho}$ — полуоси эллипсоида, от которого фигура (7.3.20) отличается совсем немного из-за неоднородности жидкости и зонального вращения, представленного законами (7.3.19) и (7.2.6′). Постоянные L_i, K_i можно выразить через ϱ, H_1, H_2 и ω_0, однако эти сложные формулы мы опустим.

Из (7.3.20) явствует, что свободная поверхность представлена в первом приближении алгебраической поверхностью простой формы.

Плотность является линейной функцией от a^2, которая уменьшается от значения $\varkappa_0 = 1+\delta H_2$ в центре до значения $\varkappa_1 = 1+\delta(H_1+H_2)$ на свободной поверхности ($H_1 < 0$ при $\delta > 0$). Возможно, этот закон слишком прост, чтобы его можно было применить к небесным телам, но это не значит, что a^2 *является линейной функцией от расстояния* до центра. Возможно, было бы лучше найти связь между a и q^*.

Характеристики поверхности (7.3.20) зависят от численных значений постоянных в уравнении. Свободная поверхность будет либо сжата, либо вытянута вдоль экватора эталонного эллипсоида согласно условиям ($z=0$)

$$2L_0\delta+K_\lambda \lesseqgtr 0. \tag{7.3.21}$$

Чтобы исследовать деформацию на полюсах, нужно вычислить $\overline{\zeta}_1^*$ в точках $\vartheta=0$ и $\vartheta=\pi$. Для отрицательного значения $\overline{\zeta}_1^*$ фигура (7.3.2) будет сжата на полюсах, поскольку в соответствии с (4.1.2) мы имеем

$$[z]_{\vartheta=0,\pi}=\pm\sqrt{\varrho}(1+\overline{\zeta}_1^*). \tag{7.3.22}$$

Форму меридиана несложно определить из (7.3.20).

7.4. Связь между зональным вращением и конвективными потоками

Гипотеза зонального вращения типа рассмотренной в предыдущих разделах также представляет собой определенное упрощение состояния движения, фактически наблюдаемого у многих небесных тел. Весьма вероятно, что такое вращение является всего лишь составляющей общей циркуляции вещества в небесном теле, обусловленной как вращением, так и конвективными потоками. В этом разделе мы лишь вкратце обсудим обширную область внутренних движений в звездах, поскольку, как упоминалось ранее, наша цель состоит всего лишь в разъяснении той роли, которую гипотеза зонального вращения играет в очень важный период жизни небесного тела, а именно во время его затвердевания. Чтобы получить возможность разработать математическую теорию на этот период, мы, конечно, можем рассмотреть зональное вращение как заданный тип движения, определенного некоторыми начальными условиями. Вообще-то, аналогичное допущение выдвигалось при формулировке и решении задачи о равномерном вращении жидкой массы. Тем не менее для лучшего понимания эволюции небесного тела следует определить не только причины зонального вращения, но и физические явления, при которых будет существовать этот вид движения.

Мы упомянули о нескольких ранних исследованиях, в ходе которых зональное вращение рассматривалось как явление, характеризуемое законом вращения Солнца Фейе. Общая задача о внутреннем содержании и внутренних движениях в звездах еще не решена, однако несколько существующих моделей более или менее точно выражают состояние, приближенное к реальному. Безусловно, простейшей из этих моделей является газообразная звезда, пребывающая в абсолютном равновесии. В этом случае стратификация представлена плотностью, выраженной через радиус. Множители, в том числе плотность и давление, связаны некоторым дифференциальным уравнением. Некоторые его решения удалось получить для разных случаев адиабатического закона (Эмден [1]). При этом принято считать, что в данном случае, т. е. в случае «конвективного равновесия», перенос тепла конвективными потоками из внутренней области звезды к ее поверхности включен в общее состояние тела. Однако необходимо принимать во внимание и другие факторы; так, Джинс [2] подчеркнул роль «вязкости излучения». Согласно одному из сделанных им выводов (Джинс [3, с. 91]), конвективных потоков в модели, соответствующей конфигурации равновесия обсуждаемого типа, не существует нигде, кроме разве что вблизи поверхности.

Мы не станем останавливаться на источниках энергии в небесных телах. Открытие ядерных реакций затмило все предыдущие соображения по этому поводу. Модели, связанные с вращающимися звездами, очевидно, гораздо важнее статической модели. Джинс в только что упомянутой работе, [2], показал, что внутренние области звезды должны вращаться гораздо быстрее ее внешнего слоя. Один из его выводов (Джинс [3, с. 265]) заслуживает нашего особого внимания. По мнению этого автора, на протяжении всей жизни любой звезды «уравнивание угловой скорости, создаваемое вязкостью, в центральных областях звезды пренебрежимо мало». В упрощенной модели он показывает, что, если угловая скорость вращения в начальный момент зависит только от радиуса, т. е. если вращение происходит посредством сфероидальных оболочек, оно не прекратится из-за регулярной вязкости или из-за излучения. Однако во втором приближении Джинс рассмотрел закон вращения Фейе. Факт возрастания эллиптичности сфероидальных слоев в направлении центра, вообще-то, должен объяснять ускорение на экваторе. Фактором, который создает данное явление, служит сила, создаваемая внутренними слоями. *Таким образом, согласно Джинсу*, зональное вращение не обязательно связано с конвективными потоками. Однако модель сфероидальных оболочек, каждая из которых вращается со своей собственной угловой скоростью, представляется слишком простым приближением. Среди общих допущений, связанных с Солнцем, мы найдем следующие выводы, основанные на многочисленных наблюдениях (В. Бьеркнес [1]): a) Солнце близко к состоянию устойчивого внутреннего равновесия; b) вообще, условия, видимо, благоприятствуют образованию стратифицированной циркуляции; c) все, что происходит на Солнце, обусловлено его излучением; d) тепло, которое теряет фотосфера, восстанавливается из более глубоких слоев посредством внутреннего излучения, конвекции и проводимости; e) внутреннее излучение считается главным фактором, особенно в глубоких слоях с очень высокой температурой; f) важность конвекции возрастает вблизи поверхности и g) вращение Солнца имеет тенденцию к созданию общей зональной симметрии.

Очевидно, что все эти факты выходят за пределы теорий, выраженных в предыдущих разделах. Мы могли бы ввести в уравнения движения закон вращения вида $\omega = \omega(s^2)$ и применить один из известных методов для решения получившихся интегральных уравнений. Однако если принять во внимание только что упомянутые новые физические факторы, уравнения движения нужно будет не только модифицировать, но и дополнить системой новых условий. При новых допущениях было, например, показано (Крогдаль [1]), что если небесное тело состоит из вязкой среды, то его вращение породило бы меридиональные потоки, обуславливающие зональный характер вращения. В теории Бьеркнеса существование таких потоков только лишь постулировалось.

Нам известно несколько специальных условий равновесия, полученных для различных видов физических явлений. Для устойчивого равновесия несжимаемой идеальной среды, когда рассматриваются только механические явления, должно выполняться условие

$$\frac{d(\omega r^2)}{dr} \geqq 0,$$

что в 1917 году доказал Рэлей[4]. Это условие касается циркуляции вокруг любой параллели. Обобщением этого условия является критерий устойчивости Солберга–Хойланда для сжимаемых сред (Васютинский [1]). В случае гравитационной неустойчивости в итоге могли бы сформироваться крупномасштабные потоки. Однако если выполняются условия гравитационной устойчивости, конвективный поток может возникнуть из-за того, что гравитационно устойчивые слои могут и не пребывать в тепловом равновесии (Фогт, Эддингтон [1], Джеффрис [1]). В таком случае результирующий градиент давления на поверхности уровня заставит вещество двигаться от экватора к полюсам или *наоборот*. Равновесие при этом возможно, если распределение температур не создает этот компонент градиента давления, но когда в расчет также принимается и излучение, это приводит к новому виду условий равновесия. В соответствии с теоремой Цейпеля [1] выработка энергии $4\pi E$ (на секунду и грамм) во вращающейся газовой массе должна происходить по закону

$$4\pi E = B\left(1 - \frac{\omega^2}{2\pi f \varkappa}\right),$$

где B — постоянная. Эддингтон [1] показал, что выработка энергии ядерными источниками «вряд ли будет происходить в соответствии с законом этого вида». Среди внутренних движений, которые могли бы возникнуть, поскольку равновесие не реализуется, наиболее вероятным явлением, согласно Эддингтону, судя по всему, являются первичные токи в плоскостях, проходящих через меридианы. Тогда эти токи должны отклоняться (в восточном или западном направлении) при вращении тела, причем разные периоды вращения приведут к разным широтам и разным глубинам. В эту общую характеристику включены оба случая: как угловая скорость, которая возрастает в слое при увеличении расстояния до оси вращения, так и падающая угловая скорость.

Ясно, что регулярная вязкость и излучение (лучистая вязкость) — факторы, действующие в противоположных направлениях. Первая стремится уравнять разности угловых скоростей, тогда как задачей последней является создание потоков, а следовательно, и таких разностей. Из уравнений

---

[4]См. также Рендерс [1].

движения вязкой среды Эддингтон [2] вывел, что потоки, сохраняющиеся под действием излучения во внутренней области массы, будут соответствовать циркуляции от полюсов к экватору вблизи поверхности.

Фактическая сложность задачи о конвекции в небесных телах, безусловно, значительно больше, чем принималась в случаях, когда делалась попытка приблизительного решения. Даже некоторые выводы, сделанные из более ранних наблюдений, судя по всему, берутся в слишком простой форме. Так, Туоминен [1] обнаружил, что солнечные пятна на широтах ниже, чем 16°, и дрейфуют в направлении экватора, тогда как пятна на более высоких широтах движутся к полюсам. Таким образом, в поверхностном слое возможны два противоположных направления конвективных потоков, и мы не имеем никаких причин исключать существования еще более сложного распределения скоростей.

На текущем этапе развития теории внутренних движений в небесных телах следует отметить, что пока речь идет о чистой динамике, в равной степени возможны оба случая: увеличения или уменьшения угловой скорости с увеличением расстояния до оси вращения. Во многих исследованиях, рассматривающих проблему конвективных потоков, при особых условиях было зафиксировано уменьшение угловой скорости. Тем не менее иногда получалась также и угловая скорость, возрастающая в слое вблизи свободной поверхности от полюсов к экватору. Что касается реального состояния в недрах небесных тел, внешние слои планетарных туманностей обычно вращаются медленнее ядра. Зональное вращение в случае Солнца, Юпитера и Сатурна характеризуется противоположным законом. Знаменитые опыты Белопольского и Рябушинского показали, что, если в стеклянной сфере, наполненной жидкостью, создать разные угловые скорости, потоки вдоль оси вращения, направленные к центру и движущиеся вдоль экваториального радиуса, обусловливаются уменьшением угловой скорости при увеличении расстояния до оси вращения. Эти потоки и потоки Эддингтона имеют противоположные направления. В только что упомянутых опытах присутствует новый фактор, а именно трение на поверхности жидкости, которое, очевидно, вообще не играет роли в звездах. Однако, судя по всему, его влияние, по сути, не меняет общий характер внутренних движений, так что эксперименты Белопольского [1] и Рябушинского [1] являются наглядной иллюстрацией зонального вращения.

С другой стороны, эти эксперименты в большей степени соответствуют условиям для конвективных потоков, существования которых можно ожидать в жидком ядре планеты или звезды, уже покрывшемся твердой корой. В таком случае важным фактором может стать трение между очень вязкой жидкой внутренней областью и корой.

При изучении столь продвинутого этапа эволюции небесного тела, коим является его затвердевание, возникновение новых теоретических сложностей просто неизбежно, поскольку, например, вид уравнения состояния для пластичных и твердых тел определить гораздо сложнее, чем для газов и жидкостей.

К очень важному общему выводу пришел Жуковский [1] при решении задачи движения твердого тела, имеющего полость, заполненную вязкой жидкостью. В этой задаче также учитывалось и трение на стенках этой полости. Согласно Жуковскому, если в вязкой жидкости, находящейся в полости, имеются конвективные потоки, то они будут направлены от полюсов к экватору вдоль поверхности, если среднеквадратичная угловая скорость яляется функцией, возрастающей вместе с расстоянием до оси вращения. При обратном направлении конвективных потоков будет иметь место противоположное распределение угловых скоростей[5].

7.5. Зональное вращение в ядре

Чтобы изучить условия задачи внутренних движений в вязком ядре планеты, запишем в векторном виде уравнения, которые использовал Жуковский [1]. Для упрощения задачи рассмотрим несжимаемую жидкость, в силу чего

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \tag{7.5.1}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость. Обозначим через $\boldsymbol{\Omega}$ угловую скорость частицы. Поскольку $\operatorname{rot} \mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega}$, а $\operatorname{rot}\operatorname{rot} \mathbf{v} = \operatorname{grad}\operatorname{div} \mathbf{v} - \nabla^2 \mathbf{v}$, получаем

$$\nabla^2 \mathbf{v} = -2 \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}. \tag{7.5.2}$$

Уравнение движения вязкой жидкости имеет вид

$$\mathbf{a} = \mathbf{F} - \frac{1}{\varkappa} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}. \tag{7.5.3}$$

Мы предполагаем, что a) сила $\mathbf{F} = \operatorname{grad} U$, т. е. получается из ньютоновского потенциала; b) кинематический коэффициент вязкости постоянен; c) жидкость однородна ($\varkappa = \mathrm{const}$). Дифференциальные уравнения движения можно выразить через компоненты угловой скорости; аналогичный вид имеют уравнения Гельмгольца для идеальной жидкости. Известно, что

[5] В литературе это утверждение иногда цитируют не совсем точно. Статья Жуковского [1] была опубликована на русском языке.

для получения этих уравнений к уравнению (7.5.3) следует применить операцию rot. Тогда, если

$$\operatorname{rot} \mathbf{F} = 0, \qquad \operatorname{rot} \frac{1}{\varkappa} \operatorname{grad} p = 0,$$

мы получаем

$$\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} = (\boldsymbol{\Omega}\cdot)\mathbf{v} + \frac{\nu}{2} \operatorname{rot} \nabla^2 \mathbf{v}. \tag{7.5.4}$$

Для преобразования этого уравнения мы используем известные формулы следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} &= \frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega}, \\ \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] &= \nabla \times [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] = \\ &= \mathbf{v}(\nabla \cdot \boldsymbol{\Omega}) + (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \boldsymbol{\Omega}(\nabla \cdot \mathbf{v}) - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega} = \\ &= (\boldsymbol{\Omega} \cdot \nabla)\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \nabla)\boldsymbol{\Omega}, \end{aligned} \tag{7.5.5}$$

поскольку

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad \nabla \cdot \boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{v} = 0.$$

Теперь, согласно (7.5.4), (7.5.2) и (7.5.5) и полагая

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega} = 2\boldsymbol{\Omega}_1, \quad \operatorname{rot} \boldsymbol{\Omega}_1 = 2\boldsymbol{\Omega}_2, \tag{7.5.6}$$

получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\Omega}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \boldsymbol{\Omega}] - 4\nu\boldsymbol{\Omega}_2. \tag{7.5.7}$$

Таким образом, силы исключаются из уравнений, и теперь должны быть заданы начальное и граничное условия для жидкой части. Жуковский использовал простой вид граничных условий. Они выражают тот факт, что трение в точке внутренней граничной поверхности коры, действующее в направлении относительной скорости (v_r) жидкости, уравновешивается внутренним трением ядра. Если через τ обозначить коэффициент внешнего трения на границе жидкости, а через μ — коэффициент вязкости, мы получим первое граничное условие в виде

$$\tau v_r = \mu \frac{\partial v_r}{\partial n}. \tag{7.5.8}$$

Второе условие должно выражать непрерывность нормальной составляющей скорости на границе полости:

$$[v_n]_{\text{ядро}} = [v_n]_{\text{кора}}. \tag{7.5.9}$$

Общие скалярные уравнения, которые можно получить из векторного уравнения (7.5.7)[6], Бонди и Литтлтон [1] использовали в исследовании внутренних движений в жидком ядре. Один из их выводов очень важен, по крайней мере для Земли, и мы представим сокращенную форму математического исследования этой задачи.

В данном случае можно использовать различные обобщенные ортогональные координаты q_1, q_2, q_3 и вывести соответствующие скалярные уравнения из (7.5.7). Представляя линейный элемент формулой

$$ds^2 = S_1\, dq_1^2 + S_2\, dq_2^2 + S_3\, dq_3^2$$

и обозначая через v_1, v_2, v_3 и $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ компоненты линейной скорости $\mathbf{v}$ и угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ соответственно в направлениях, соответствующих q_1, q_2, q_3, запишем первое уравнение движение, которое вытекает из (7.5.7) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial t} = \frac{1}{S_2 S_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2} S_3(v_1\omega_2 - v_2\omega_1) - \frac{\partial}{\partial q_3} S_2(v_3\omega_1 - v_1\omega_3)\right] - \\ - \frac{\nu}{S_2 S_3}\left\{\frac{\partial}{\partial q_2}\frac{S_3}{S_1 S_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(S_2\omega_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(S_1\omega_1)\right] - \right. \\ \left. - \frac{\partial}{\partial q_3}\frac{S_2}{S_3 S_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(S_1\omega_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(S_3\omega_3)\right]\right\}.\end{aligned} \tag{7.5.10}$$

Второе и третье уравнения несложно получить с помощью простой смены индексов. Для дальнейших исследований используются цилиндрические координаты $q_1 = z$, $q_2 = r$, $q_3 = \gamma$, и мы имеем $ds^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\gamma^2$. Следовательно, $S_1 = S_2 = 1$, $S_3 = r$. Для упрощения этого вида уравнений Бонди и Литтлтон ввели оператор, и для цилиндрических координат этот оператор определяется как[7]

$$\widehat{D}^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial R} \equiv \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}. \tag{7.5.11}$$

Этот оператор можно использовать в случае осевой симметрии. Полагая, что все факторы, входящие в (7.5.10), не зависят от угла γ (долгота), эти уравнения можно привести к гораздо более простому виду. Из выражения $\operatorname{div}\mathbf{v}$ в обобщенных координатах

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = \frac{1}{S_1 S_2 S_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(v_1 S_2 S_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(v_2 S_3 S_1) + \frac{\partial}{\partial q_3}(v_3 S_1 S_2)\right]$$

[6] Ярдецкий [10].

[7] Символ $\widehat{\ }$ используется во избежание путаницы с расстоянием D в предыдущих главах.

несложно увидеть, что уравнение (7.5.1) для цилиндрических координат и осевой симметрии будет выполняться, если положить

$$rv_1 = \frac{\partial\psi}{\partial r}, \quad rv_2 = -\frac{\partial\psi}{\partial z}. \tag{7.5.12}$$

Общеизвестные формулы для составляющих $\operatorname{rot}\mathbf{v} = 2\boldsymbol{\Omega}$ дают выражения

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \frac{1}{2S_2S_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}(S_3v_3) - \frac{\partial}{\partial q_3}(S_2v_2)\right],\\
\omega_2 &= \frac{1}{2S_3S_1}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}(S_1v_1) - \frac{\partial}{\partial q_1}(S_3v_3)\right],\\
\omega_3 &= \frac{1}{2S_1S_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(S_2v_2) - \frac{\partial}{\partial q_2}(S_1v_1)\right].
\end{aligned} \tag{7.5.13}$$

Если положить

$$S_3v_3 = rv_3 = \chi, \tag{7.5.14}$$

то уравнения (7.5.13) принимают вид (для цилиндрических координат)

$$\omega_1 = \frac{1}{2r}\frac{\partial\chi}{\partial r}, \quad \omega_2 = -\frac{1}{2r}\frac{\partial\chi}{\partial z}, \quad \omega_3 = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial v_2}{\partial z} - \frac{\partial v_1}{\partial r}\right]. \tag{7.5.15}$$

Согласно (7.5.12), (7.5.15) и (7.5.11) имеем

$$\omega_3 = -\frac{1}{2r}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} + r\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial r}\right] = \frac{1}{2r}\overline{D}^2\psi. \tag{7.5.16}$$

Таким образом, шесть неизвестных переменных v_i, ω_i выражаются через две функции: $\psi(z,r,t)$ и $\chi(z,r,t)$. Чтобы определить эти функции, можно использовать первое и третье уравнения (7.5.7) при подстановке (7.5.12), (7.5.14), (7.5.15) и (7.5.16). Эти уравнения были линеаризованы Бонди и Литтлтоном. Сначала эти авторы получили уравнения

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\overline{D}^2\right)\chi - \frac{1}{r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial z}\frac{\partial\chi}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial\chi}{\partial z}\right] = 0,\\
&\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu\overline{D}^2\right)\overline{D}^2\psi + \frac{2\chi}{r^2}\frac{\partial\chi}{\partial z} = 0
\end{aligned} \tag{7.5.17}$$

и предположили, что движение в жидком ядре лишь немного отличается от вращения твердого тела вокруг оси, неподвижной в пространстве. При этом условии пусть

$$\chi = (n + kt)r^2 + \varphi(r^2, z), \tag{7.5.18}$$

где n и k — две постоянные, а φ — функция, имеющая малые значения порядка ψ. Бонди и Литтлтон рассмотрели действие приливного трения в случае Земли и предположили также, что n имеет малое значение, тогда как $k < 0$ и $|k| \ll n^2$. Мы делаем аналогичные предположения, которые будут соответствовать очень малым изменениям в $\omega_1, \omega_2, \omega_3$. Тогда, если в (7.5.7) пренебречь произведениями других малых множителей и даже слагаемым, содержащим множитель kt, уравнения (7.5.7) примут вид

$$\begin{gathered} \nu \overline{D}^2 \chi + 2n \frac{\partial \psi}{\partial z} = kr^2, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \overline{D}^2 \right) \overline{D}^2 \psi + 2n \frac{\partial \psi}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{7.5.19}$$

Чтобы еще упростить эти линеаризованные уравнения, рассмотрим очень медленное отклонение от вращения твердого тела, подставим функцию φ в первое слагаемое уравнения (7.5.19), пренебрегая изменением ψ во времени. Тогда мы имеем

$$\begin{gathered} \nu \overline{D}^2 \varphi + 2n \frac{\partial \psi}{\partial z} = kr^2, \\ \nu \overline{D}^4 \psi - 2n \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \end{gathered} \tag{7.5.20}$$

Очевидно, что допущения, обусловившие вывод уравнений (7.5.20), вряд ли можно принять для газообразных тел типа звезд. И все же они представляются правдоподобными, когда речь идет об очень медленных движениях, например, во внутренней области Земли в различные геологические эпохи.

Решения уравнений (7.5.20), полученные Бонди и Литтлтоном, представляют собой те самые внутренние движения, для которых скорость циркуляции вокруг оси вращения имеет более высокий порядок величины, чем скорость циркуляции в меридиональных плоскостях, т. е. первая гораздо больше второй. Этот вывод очень важен для теории фигуры Земли, поскольку согласно гипотезе зонального вращения основные характеристики земной коры создавались как раз под действием внутренних движений такого типа.

7.6. Внутренние движения и затвердевание небесного тела

Мы имеем возможность наблюдать характерные особенности поверхностей очень малого числа планет, а максимально подробно нам известна лишь структура поверхностного слоя Земли и Луны. Ясно, что огромное разнообразие причин, способных повлиять на процесс формирования коры при остывании небесного тела, способно привести к возникновению множества разных структур. Изменяющееся поле сил притяжения и результирующее приливное действие, падающие метеориты или деление тела, неравномерное распределение вещества — все это может сыграть бóльшую или меньшую роль в деформации затвердевающего внешнего слоя тела. Однако особое внимание следует обратить на внутренние движения, которые являются одним из самых важных факторов, действующих во время формирования на небесном теле твердой коры.

Чтобы учесть такие внутренние движения, придется предположить, что внутренняя область планеты обладает свойствами жидкой среды. Для гипотезы внутренних движений не имеет значения, верно или нет традиционное предположение о том, что планеты образовались из очень горячей жидкости, которая остывала на протяжении всей эволюции, или что Земля, например, образовала жидкое ядро в геологический период. Последнее предположение, а именно: что земное ядро образовалось из состояния почти однородной смеси фаз железа и силиката, и что в ранний период своего существования наша планета увеличила свою температуру путем сжатия газа и пылевой массы, выдвинул Урей [1]. Мы не станем подробно описывать химические и физические процессы, которые происходят в недрах Земли, однако в настоящее время как теория, так и наблюдения снизили вероятность существования небесного тела, в недрах которого потоки вещества отсутствуют, практически до нуля. Условие вращения любого небесного светила как твердого тела сослужили очень хорошую службу в теории, пока требовалось объяснение фигур в крупном масштабе. Утверждение о том, что фактор типа вязкости способен уравнять все различия скоростей еще до затвердевания планеты, всегда являлось лишь допущением, которое принималось исключительно ввиду нехватки знаний об источниках, способных поддерживать эти различия. Как упоминалось ранее, открытие таких источников энергии, как углеродный цикл ядерной реакции, еще больше снизило вероятность правдоподобности этого предположения. Единственный критерий в данном случае должен браться из наблюдений. Если следов деформаций в затвердевшей части небесного тела не обнаружено, значит внутреннее движение в жидких частях, очевидно, не сыграло существенной роли. Если внешний вид структуры коры свидетельствует о том, что некоторые смещения имели место быть, мы все равно не можем утверждать с уверенностью, что они обусловлены исключительно действием внутренних движений. Вообще, было предложено несколько теорий, связанных с существованием потоков в недрах Земли. Судя по всему, О. Фишер в 1889 году первым показал, что конвективные потоки способны вызвать определенные тектонические явления. Эту идею в разных видах использовали Ампферер, Андре, Швиннер, Холмс, Григгс, за счет чего были получены решения частных задач, связанных с тепловыми возмущениями типа распределения температур по континентам и субокеаническим частям коры или с клеточной конвекцией типа Бернара. Согласно Урею [1], предположение о том, что охлаждение на полюсах или под океанами является единственной причиной, создающей потоки в мантии Земли, ведущие к образованию горных цепей, судя по всему, невозможно. Он (Урей [2]), однако, допускает возможность *планетарной конвекции*, которая могла бы происходить во времена выской вязкости недр Земли. Ярдецкий [13] отметил, что ни одна из этих теорий подкорковых потоков не могла объяснить характерные факты, известные о формировании земной коры. Однако, вообще, по мнению Венинг-Мейнеса [1], лучшая гипотеза, объясняющая геологические процессы, просто обязана использовать потоки в пластичных подкорковых слоях. Эти потоки могли создаваться градиентом температуры, поддерживаемым другими источниками энергии или внутренней перестановкой тел разной плотности. О роли таких перестановок говорил и Урей [1]. Обсуждая проблему конвекции в сфере и в мантии, а также представляя распределение системы потоков с помощью сферических гармоник первых пяти порядков, Венинг-Мейнесц [2] утверждает, что эти потоки отвечают за формирование протоконтинента и его последующую деформацию, т. е. он приходит к тому же заключению, которое автор впервые сделал в 1929 году (см. также Гутенберг [1]). Задачу о тепловой неустойчивости планеты, нагреваемой изнутри, вновь рассматривает Чандрасекхар [4]. Чтобы понять принцип возникновения конвективных потоков, мы должны более точно разобраться, какие факторы создают подобные разности температур как в недрах Земли, так и в любом небесном теле. Ранее мы использовали следующие простейшие предположения: на продвинутом этапе эволюции небесного тела, когда начинается формирование твердой коры, можно ожидать, что в большей или меньшей степени процесс разделения веществ завершится, стратификация, соответствующая распределению сил, установится, а температурное поле будет определяться условием теплового равновесия. Отказ от последнего утверждения открывал путь к размещению конвективных потоков в абсолютно любой части небесного тела. Именно этим объясняются различные аспекты гипотезы конвективных потоков, а также, возможно, и то, что ни один из них так и не стал общепринятым. Однако в этой гипотезе, судя по всему, присутствует большая доля истины. Следовательно, ее нужно оформить таким образом, чтобы сделанные из нее выводы можно было проверить более точно, чем это делалось ранее.

Факт возможности внутренних движений в любом небесном теле до момента его затвердевания неоспорим. В некоторый ранний период эволюции небесного тела эти движения вполне могли иметь произвольное распределение. Однако, принимая во внимание влияние других факторов, можно ожидать, что позже на эти потоки наложилось некое регулярное распределение. Предоставить математическую теорию, доказывающую, что некоторый тип внутренних движений просто *обязан* иметь место, будет очень сложно. Во многих случаях нам придется довольствоваться доказательством возможности такого типа движений. Исследование Бонди и Литтлтона обеспечили такое доказательство для зонального вращения в планете. Как было показано в предыдущем разделе, в системе конвективных потоков, имеющих осевую симметрию, циркуляция вокруг оси может являться доминирующей составляющей, тогда как смещениями по меридианам можно пренебречь. Необходимо отметить, что этот характер внутренних движений не всегда накладывается на смещения в каждом небесном теле. Носили ли относительные движения в недрах Земли такой зональный характер или нет, можно понять только при сравнении логических следствий этого допущения для *фактического* распределения главных особенностей в коре Земли.

7.7. Формирование основных черт земной коры

Автор (Ярдецкий [1, 4, 5]) уже показал, что гипотеза зонального вращения объясняет многие важные характеристики земной коры и не противоречит другим особенностям, которые можно объяснить дополнительно. Сложность деформаций, произошедших за геологическую историю нашей планеты, равно как и современная форма ее коры, требует согласия относительно того, какие факты следует считать главными. Из-за пренебрежительного отношения к такому определению обсуждение некоторых геофизических теорий вызвало много споров и путаницы. Тогда была сделана попытка представить список самых важных фактов, которые следует принимать во внимание в первую очередь (Ярдецкий [14]). (a) Внешний слой Земли мало отличается от сферической оболочки; его плотность растет с увеличением глубины. (b) Сложность структуры является характеристической вплоть до самого верхнего слоя (толщиной 33 км). Слой, в настоящее время называемый корой, петрологически отделен от остальной твердой части Земли, называемой мантией. Здесь термин кора имеет смысл твердой оболочки. (c) Даже в настоящее время, если верить сейсмологам, ядро следует считать жидким. Его радиус равен 3 400 км.

Гипотеза зонального вращения полностью совместима с этой группой данных. Из (a) можно заключить, что в то время, когда мантия стала достаточно толстой, чтобы сопротивляться любой крупномасштабной деформации, вращение Земли происходило практически идентично вращению твердого тела с малой угловой скоростью. Медленные внутренние движения не внесли существенных изменений в стратификацию, которая мало отличается от таковой для неоднородной фигуры равновесия (соответствующей закону плотностей, представленному на рис. 7, Буллен [2]).

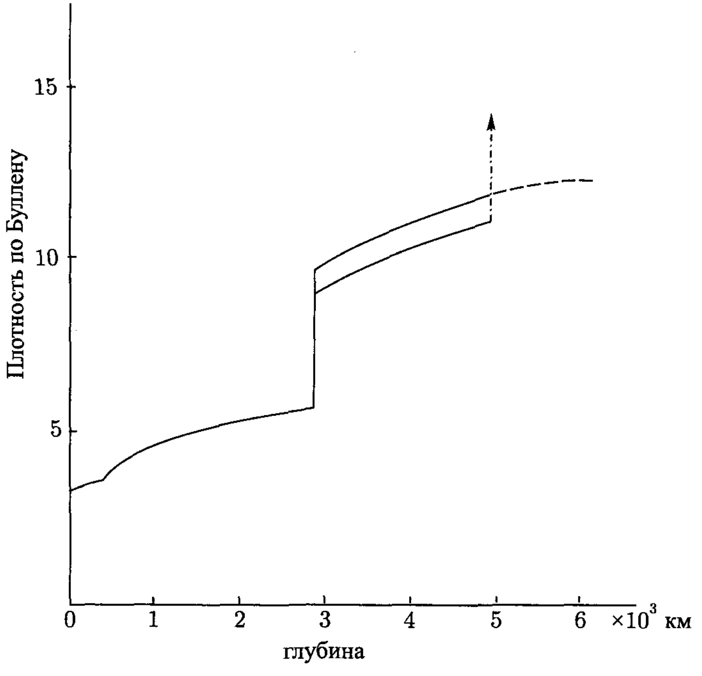


Рис. 7

Очевидно, самое важное действие внутренних движений могло быть обеспечено в процессе образования коры и в конечном итоге первого тонкого твердого слоя мантии. В настоящее время данные по коре, в общем, свидетельствуют о том, что в некоторые геологические эпохи отдельные части коры и мантии были жидкими. Наиболее важными общими фактами о коре следует считать (d) то, что материки состоят главным образом из гранита, тогда как дно океанов образовано базальтовыми породами; (e) фактическое распределение суши и моря, одной из наиболее поразительных особенностей которого является существование географических гомологий; (f) изменения в этом распределении в различные геологические периоды; (g) образование и распределение горных цепей и (h) фазы в образовании горных цепей.

Гипотеза зонального вращения предлагает очень простое объяснение горизонтального разделения, упомянутого в пункте (d). Она также показывает, каким образом Старый Свет мог отделиться от Западных материков, и как текущая под ним магма «оттащила» его на восток. Австралия, Вест-Индия и многие тихоокеанские острова вполне могли отколоться от Азии и Африки и также сместиться на восток под действием экваториального пояса жидкого субстрата, быстро движущегося в этом направлении. Таким образом, гипотеза зонального вращения недр Земли, судя по всему, очень хорошо согласуется с основными особенностями фактического распределения суши и моря. Что касается изменений континентальных блоков и океанических бассейнов, оценка влияния потоков магмы в разные геологические эпохи требует отдельного исследования. Нет никаких сомнений, что некоторые изменения были обусловлены другими причинами, нежели «волочение» по поверхности раздела кора – мантия. Важную роль также могла сыграть деформация всей планеты из-за ее смещения относительно оси вращения. Приливы и отливы во все еще жидких недрах Земли при относительно тонкой коре, равно как и отклонения от простого закона зонального вращения (о которых говорил автор), вполне могли повлиять на застывание коры во многих местах. Однако при образовании и распределении горных цепей наиболее важную роль опять же сыграли напряжения, созданные зональным вращением магмы. Так, эта гипотеза позволяет довольно легко объяснить как пояс третичных складчатых гор, так и некоторые другие горные цепи (Ярдецкий [5, 7, 8]). Чтобы понять образование остальных горных цепей (типа Аппалачей), необходимы дополнительные данные, позволяющие найти поле сил, приведших к появлению этих складок. Последний вышеупомянутый момент, а именно цикличный характер горообразования, т. е. фазы деформаций, можно объяснить вмешательством двух факторов: растущей скорости подкорковой магмы и увеличивающейся толщины коры. Второй фактор свидетельствует о том, что в более поздние геологические периоды складкообразование требует бóльших напряжений, тогда как первый обеспечивает рост горизонтальных напряжений, способных достичь значения, необходимого для образования таких складок. При этом следует отметить, что в отсутствие гипотезы зонального вращения непонятно, почему поле этих сил существует точно в местах, определяемых фактическим распределением горных цепей.

Глава 8
Изменяющиеся фигуры

8.1. Малые колебания

Множество фигур изолированной жидкой массы, существование которой можно доказать с помощью разных методов, содержит как устойчивые фигуры равновесия или фигуры жидкости в постоянном зональном вращении, так и неустойчивые конфигурации. Двумя типами задач, которые помогают прояснить поведение небесного тела на протяжении более или менее продолжительного промежутка времени, являются колебания относительно устойчивой фигуры и прогрессирующие деформации. Задачам первого типа небесная механика уделяла больше внимания. В основном исследовались такие периодические изменения, как свободные колебания жидкой массы или небольшие изменения, обусловленные действием внешних периодических сил.

Пуанкаре [1] изучал свободные колебания жидкого эллипсоида, но вопрос возможности того, что все частицы жидкой массы имеют один и тот же период колебаний, требует дополнительных обсуждений. В 1920 году Аппель и Картан [1] показали, что выводы Пуанкаре абсолютно правильны, несмотря на сомнения, озвученные Глоба-Михайленко [1].

В 1884 году Хилл обнаружил, что интеграл кинетической энергии в случае, когда частицы жидкой массы имеют скорость

$$\mathbf{v} = \nabla\varphi + m\nabla\psi, \tag{8.1.1}$$

можно записать в виде

$$fU - \int \frac{dp}{\varkappa} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}(\nabla\psi)^2. \tag{8.1.2}$$

Теперь это уравнение можно использовать вместо (1.1.5).

Полагая, что поверхности уровня, как и ранее, определяются параметром a, уравнение (8.1.2) принимает вид

$$fU = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\varphi)^2 - \frac{m^2}{2}(\nabla\psi)^2 + \mathrm{funct}(a). \tag{8.1.3}$$

Так, например, разложение в ряд, данное Ляпуновым (пятая глава), можно использовать до тех пор, пока эти поверхности совсем немного отличаются от эллипсоидов, и это уравнение можно решить для функции ζ, которая будет определять деформацию. Это, конечно, будет возможно, только если известны три функции φ, m, ψ. Однако они должны удовлетворять некоторым общим условиями, указанным Клебшем [1], так что задача становится гораздо сложнее, чем типовые задачи о фигурах равновесия. Ярдецкий [4] вычислил первое приближение для периодических изменений меридиана колеблющегося однородного эллипсоида с помощью заданного закона колебаний (8.1.3) и метода Ляпунова.

Периодические изменения жидкого эллипсоида, при которых в каждый момент времени форма жидкости является точно эллипсоидальной, определил Дедекинд [1]. (См. также Ламб [1].)

Общеизвестно, что к задаче о малых колебаниях жидкой массы под действием периодических сил применялись методы, отличные от обсуждавшихся в предыдущих главах. Обширной областью, результаты которой не используются в этом исследовании, является теория приливов и отливов.

8.2. Прогрессирующие деформации

Задача о прогрессирующих изменениях небесного тела была впервые рассмотрена в частном виде, а именно: было показано существование непрерывных множеств фигур равновесия, из чего был сделан совершенно естественный вывод. Предполагалось, что в процессе эволюции небесное тело будет подвергаться таким изменениям, что впоследствии его свободная поверхность будет совпадать с фигурами, принадлежащими к одному из этих множеств. Очевидно, что это излишне идеализированный случай. В том аспекте, в котором была поставлена эта задача, чтобы получить некоторые выводы об эволюции звезд, особых успехов в понимании прогрессирующей деформации достигнуто не было (см., например, Джинс [3]). Нет никаких сомнений в том, что этот случай изолированной однородной массы имеет далеко не первую важность. В большинстве случаев имеется масса факторов, например, действия соседей по Солнечной системе, которые непременно повлияют на такую безмятежную эволюцию.

Однако, несмотря на то что нам не следует ожидать более или менее важных приложений теории изменяющихся фигур в случае каждого небесного тела, эта теория должна получить дальнейшее развитие из-за деформаций Земли.

В случае Земли можно выделить два класса деформаций. К первому принадлежат все относительные смещения частей внешнего слоя. Теперь допущение о том, что складчатость крупных горных цепей связана с горизонтальными смещениями вплоть до 100 км (Джеффрис [1]), вроде бы не вызывает сомнений. Единственный возникающий вопрос связан с горизонтальными смещениями порядка нескольких тысяч километров, которых требует теория континентальных сдвигов. Любые подобные изменения в распределении масс повлияли бы на форму геоида, поэтому в Каменноугольный период эта фигура отличалась от определенной в настоящее время.

Горизонтальные деформации в коре, равно как и некоторые эпирогенические смещения, могли возникнуть вследствие внутренних движений, например, из-за зонального вращения Земли, о чем уже упоминалось в седьмой главе.

Деформация другого типа могла быть обусловлена смещением оси вращения в теле. В геофизике и родственных науках неоднократно обсуждалась миграция полюсов Земли, причем, согласно одному из толкований геологических данных, полюса постепенно двигались по поверхности Земли на протяжении всех геологических периодов. Одно из наиболее поразительных явлений прошлого, трансгрессии и регрессии, изменение распределения суши и воды самыми разными способами, можно по крайней мере частично объяснить смещением оси вращения Земли. Однако в общем случае задача о вращении деформируемого тела до сих пор далека от полного решения. Основные уравнения движения тела, способного изменять форму в ходе этого движения, дал Лиувилль (см., например, Тиссеран [1]). Влияние геологических изменений на ось вращения Земли попытался определить Дарвин [2]. Он предположил, что тело деформируется незначительно и изменения происходят медленно. Разные условия этой задачи также исследовал Пикар [1]. Дарвин и Скиапарелли ввели гипотезу непрерывной адаптации тела к новой фигуре равновесия, возникающей из-за смещения оси вращения по отношению к оси инерции, поскольку движение деформируемого тела невозможно полностью определить из уравнений Лиувилля. Как известно, в общем случае в таком теле концепцию оси вращения нужно вводить более точным образом, и это можно сделать по-разному (см., например, Билимович [1]). Наиболее полезной в этом случае, судя по всему, оказывается ось вращения эквивалентного твердого тела, по условию обладающего линейным импульсом и кинетическим моментом, равными этим характеристикам у заданного тела (Ярдецкий [4, 7, 8, 9]). Мы ограничимся лишь упоминанием теоремы Миланковича [1], которая пока что, судя по всему, является наилучшим подходом к решению проблемы миграции полюсов Земли. Мы можем рассмотреть деформацию всего тела Земли, предположив, что оно является упругим, пластичным или находится в любом состоянии, отличном от твердого. С другой стороны, можно предположить, что жидкое (или пластичное, или жидкостное) ядро покрыто твердой корой, способной изменять свою форму.

В обоих случаях асимметричное распределение масс в самом верхнем слое играет в смещении полюсов важнейшую роль. Рассмотрим моменты инерции этой асимметричной оболочки. Каждой точке на свободной поверхности можно сопоставить значение момента (J), взятого относительно центральной оси, проходящей через эту точку. Тогда свободная поверхность становится полем J. Миланкович доказал, что прогрессирующее смещение $\mathbf{v}$ полюса Земли происходит в каждый момент времени в направлении градиента J, т. е.

$$\mathbf{v} = k\nabla J.$$

Прогрессирующее смещение полюса, конечно же, сочетается с общеизвестными периодическими изменениями его положения (прецессией, нутацией).

Совершенно очевидно, что общие выводы этой теории о вращении деформируемой Земли можно применить к любому небесному телу в период его затвердевания. Наиболее важны следующие из них: (a) прогрессирующее смещение коры по ядру в процессе затвердевания обусловлено одновременным вращением вокруг оси в экваториальной плоскости и адаптацией массы к непрерывно изменяющемуся полю гравитационных сил (т. е. в экваториальной плоскости тела имеется компонента угловой скорости); (b) первопричиной такого смещения служит действие момента центробежных сил, возникающих из-за симметричного распределения масс в коре; (c) адаптация возможна, если кора является гибкой, а ядро имеет свойства жидкости; (d) вообще, потоки во внутренней области могут играть важную роль в скольжении коры по жидкой внутренней части, но в случаях типа Земли их влияние на скольжение, судя по всему, обладает далеко не первичной важностью.

Чтобы получить более глубокое понимание характера этих изменений, сколь бы малы и медленны они ни были, нам предстоит решить еще массу задач.

Глава 9

Системы, состоящие из жидких и твердых частей

9.1. Твердое ядро и жидкая оболочка

После, вероятно, более чем четырех миллиардов лет своего существования Земля все еще состоит из жидкой и твердой частей. Если не принимать в расчет гидро- и атмосферу, наиболее подходящей моделью нашей планеты следует считать твердое тело с внутренней полостью, заполненной жидкостью. Ясно, что ради простоты мантию и кору принято считать твердыми. Однако в некоторых теориях на протяжении определенного периода истории нашей планеты принимается существование твердого ядра в жидкой Земле[1]. Определение фигуры такой системы сводится к задаче о стратификации в жидкой части при заданных условиях. Подробнее эта задача еще не рассматривалась. Ее краткое обсуждение приводится в лекциях Пуанкаре [2] и в еще одном исследовании Лихтенштейна [5]. Только в последнем имеются общие уравнения, определяющие точную форму моря, покрывающего Землю. Однако решения в каких-то определенных функциях там нет.

Даже если ограничиться фигурами равновесия системы, состоящей из жидкой и твердой частей, несложно увидеть, что получится огромное множество задач по причине того, что можно выдвинуть самые разные предположения как о составе каждой части, так и о форме твердого ядра или коры. Очевидно, что простейшей задачей такого рода является абсолютное равновесие жидкого слоя, окружающего сферическое твердое ядро. Одно решение лежит на поверхности: стратификация в концентрических сферах, если давление на свободной поверхности равно нулю. Судя по всему, доказательство единственности и устойчивости фигуры равновесия, заданной для случая отсутствия твердого ядра, не требует существенных изменений. Новые трудности возникают в случае относительного равновесия.

---

[1] В недавно созданной теории предполагается, что твердое внутреннее ядро отделено от твердой мантии жидкой поверхностной оболочкой.

Для жидкой части данной системы уравнения (1.1.1)–(1.1.8) справедливы при условии, что U является суммой потенциалов U_l и U_c жидкой и твердой частей соответственно. Тогда уравнение (1.1.5) следует записать в виде

$$fU_l + fU_c + \frac{\omega^2 s^2}{2} = \int \frac{dp}{\varkappa} + \mathrm{const}, \tag{9.1.1}$$

причем это условие выполняется для объема V_l жидкой части. На ее свободной границе должно выполняться условие $p = 0$ или

$$fU_l + fU_c + \frac{\omega^2 s^2}{2} = \mathrm{const}, \tag{9.1.2}$$

однако для внутренней границы V_l таких простых условий не существует. Возможность предположить, что центр тяжести ядра совпадает с центром тяжести всей системы, зависит от формы объема твердой части V_c и от распределения в ней плотности. Решение можно получить только при простейших допущениях о распределении плотности и форме ядра. Предположим, что ядро представляет собой однородную сферу, и что как ядро, так и жидкий слой вращаются с постоянной угловой скоростью. Предположим также, что вся эта система изолирована в пространстве. Весьма правдоподобным при этом представляется постоянное существование плоскости симметрии, проходящей через центр масс всей системы. Кроме симметрии относительно этой экваториальной плоскости, также можно ожидать наличия осевой симметрии. Не исключено, что в случае сферического ядра можно доказать невозможность фигур типа эллипсоида Якоби. Однако твердое эллипсоидальное ядро с тремя неравными осями по меньшей мере не противоречит существованию таких фигур. Для однородного вращения смешанной системы (состоящей из жидкой и твердой частей) необходимым условием, как упоминалось в разделе (1.2), является совпадение оси вращения с одной из осей инерции. Очевидно, что в случае симметричных фигур, определенных выше, это условие выполняется. Более того, сферическое твердое ядро, которое однажды начало равномерное вращение такого рода, продолжит вращаться вокруг оси, неподвижной в пространстве, поскольку как результирующий момент давлений на его поверхности, так и момент сил притяжения будут равны нулю. На поверхности ядра $r = r_c$, а потенциал

$$U_c = \frac{m_c}{r_c}, \tag{9.1.3}$$

где m_c — масса ядра, причем она постоянна. Согласно (9.1.1) при $r = r_c$ мы имеем

$$fU_l + \frac{\omega^2 s^2}{2} = \int \frac{dp}{\varkappa} + \mathrm{const}, \tag{9.1.4}$$

однако не имеем права утверждать, что давление (и плотность) обладают постоянными значениями на всей этой поверхности. Таким образом, уравнение (9.1.4) становится новым граничным условием, которому должна удовлетворить функция, определяющая стратификацию.

Если мы хотим применить к задаче такого рода метод Ляпунова, сначала нужно попытаться еще больше упростить условия. Например, рассмотрим очень медленное вращение немного неоднородной жидкости в слое, окружающем однородное сферическое ядро. Тогда, поскольку угловая скорость очень мала, поверхности уровня F_a, вероятно, будут лишь немного отличаться от множества концентрических сфер E_a радиуса $a\sqrt{\varrho}$. Пусть $a = 1$ будет значением параметра a, соответствующим свободной поверхности, т. е. сфере E. В законе плотностей $\varkappa = 1 + \delta\varphi(a)$ (4.1.1) параметр δ вновь имеет очень малые значения, и уравнения

$$\begin{aligned} x &= a(1+\zeta)\sqrt{\varrho}\sin\vartheta\cos\psi, \\ y &= a(1+\zeta)\sqrt{\varrho}\sin\vartheta\sin\psi, \\ z &= a(1+\zeta)\sqrt{\varrho}\cos\vartheta \end{aligned} \tag{9.1.5}$$

представляют поверхности уровня F_a. Они отличаются от концентрических сфер E_a, в силу чего одна часть множества F_a будет пересекаться с границей ядра. Таким образом в разных точках $P(x,y,z)$ сферы $r = r_c$ в уравнениях (9.1.5) нужно будет принимать неравные значения параметра a. Если использовать определение параметра a, данное в разделе (4.14.1), нам придется допустить, что объемы F_a и E_a равны при $a \geqq a_1$, где a_1 должно определяться особым условием. Объем F_a состоит из объема ядра $\frac{4}{3}\pi r_c^3$ и объема жидкого слоя. Изменяя обозначения осей в (4.1.4) и в других формулах раздела (4.1), получаем условие

$$\frac{4}{3}\pi r_c^3 + \frac{\varrho\partial\sqrt{\varrho}}{3}(a^3 - a_1^3)\int(1+\zeta)^3 d\sigma = \frac{4}{3}\pi a^3\varrho\sqrt{\varrho}.$$

Следовательно, если в этом случае также должно выполняться условие (4.1.6), мы должны иметь $a_1^3\varrho\sqrt{\varrho} = r_c^3$. Потенциал U_l в уравнении (9.1.1) теперь можно взять в виде (4.1.7) с пределами интегрирования, равными a_1 и 1. Это вряд ли позволило бы применить метод Ляпунова. Однако нам известно, что в случае жидкой массы, когда потенциал представлен суммой (4.3.4), задачу о фигурах равновесия можно свести к уравнению (4.3.16). Первый член этой суммы (Ψ) соответствует плотности $\varkappa = 1$. Поскольку потенциал, создаваемый притяжением однородного тела, не зависит от агрегатного состояния этого тела, можно предположить, что Ψ соответствует однородной фигуре, состоящей из твердого ядра (плотностью $\varkappa_1 = 1$) и жидкости с равной плотностью, заполняющей остальной объем. Оставшаяся часть суммы $U_l + U_c$ создается избытком плотности $\delta\varphi(a)$ в объеме $V_{\text{общ.}} - V_{\text{ядр.}}$, что эквивалентно модифицированному закону плотностей, в котором принимается, что $\varphi(a) \equiv 0$ при $a < a_1$ и $\varkappa = 1 + \delta\varphi(a)$ при $a \gtreqq a_1$. Это условие повлияет на слагаемое Φ в уравнении (4.3.4). Соответственно, тогда мы должны предположить, что функция $\zeta = \zeta(a, \vartheta)$, выражающая отклонение поверхностей уровня F_a от сфер E_a, в интервале $(a_1, 1)$, т. е. в жидкой части системы, будет определяться уравнением (4.3.16)

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{\overline{\zeta}' d\sigma'}{D(a,1)} = W + P(a). \tag{9.1.6}$$

В уравнениях (4.3.17) и (4.3.18) функция $\Phi(0) \equiv 0$ из-за обращения $\varphi(a)$ в нуль в центре масс. Тогда отличие этой задачи от задачи о жидкой массе (четвертая глава) будет выражаться новыми значениями функции Φ. Мы вновь можем предположить, что функция ζ раскладывается в ряд

$$\zeta = \sum_{i=1}^{\infty} \zeta_i \delta^i, \tag{9.1.7}$$

и использовать преобразования, аналогичные описанным в разделе (4.3). Результаты Ляпунова наглядно демонстрируют, как сложно на практике вычислить функции ζ_i, дающие множество приближений к точному решению. Мы не будем пытаться найти даже первые функции, поскольку не считаем, что решение данной задачи будет иметь хоть сколько-нибудь важные приложения.

В теории приливов и отливов свободная поверхность океана в состоянии равновесия на твердом теле Земли выбирается в качестве поверхности отсчета, относительно которой определяются колебания. Однако М. Бриллюэн [1] отмечал, что, согласно его исследованиям, эта поверхность неустойчива. Он пришел к выводу о том, что устойчивой постоянной конфигурации жидкости, не движущейся относительно твердого тела, имеющего постоянную угловую скорость, просто не существует.

Итак, мы перечислили некоторые весьма ограничивающие, но необходимые условия равновесия смешанных систем, но вопрос устойчивости таких систем еще предстоит изучить во всех подробностях.

9.2. Жидкая масса и плавающие твердые тела

Отношение масс, равно как и отношение плотностей, определяет важность задачи о вращении системы, состоящей из жидкой и твердой частей, в теории фигур небесных тел. Если, например, жидкая масса гораздо больше одной или нескольких твердых частей системы, и эти части имеют меньшую плотность, мы можем рассмотреть различные конфигурации, которые будет иметь эта жидкая масса с плавающими в ней телами. Период, на протяжении которого планета или ранее упомянутая звезда могут рассматриваться как большая жидкая масса, совсем немного отличающаяся от фигуры равновесия и частично покрытая плавающими телами, представляется одним из естественных этапов эволюции небесных тел. Иногда можно услышать такое возражение, что вещества, присутствующие во внешней оболочке Земли, в процессе ее затвердевания стали более плотными и должны были утонуть в остальной жидкой массе при остывании свободной поверхности Земли. Поскольку увеличение плотности с глубиной — факт общеизвестный, возникает вопрос, насколько глубоко могли опуститься эти затвердевшие части внешнего слоя. Стратификация в небесном теле, даже если оно пребывает в газовом состоянии, судя по всему, является еще одним общеизвестным фактом. Можно ли постулировать, что закон распределения плотности неизменен на протяжении всей истории небесного тела, и что такие затвердевшие части внешнего слоя всегда должны опускаться на большую глубину? Это допущение неявным образом делается в некоторых исследованиях затвердевания Земли. Предположим, что по истечении времени, когда небольшие твердые тела двигались в направлении центра по вертикали, плавясь и смешиваясь с более глубокими слоями, дифференциация могла достигнуть такой степени, при которой движение вглубь уже становилось невозможным. Таким образом, вполне могла затвердеть более обширная часть внешнего слоя, причем ее средняя плотность стала меньше плотности более глубоких слоев. В случае с Землей подобное допущение подтверждается изостатическим распределением масс в коре. Даже несмотря на все свое несовершенство, изостазия выступает в защиту концепции материковых блоков, дрейфующих по еще горячей и жидкой планете.

Затвердевание всего внешнего слоя вращающейся жидкой планеты может произойти одновременно, и, если никакие другие факторы не будут противостоять этому процессу, можно ожидать, что планета покроется равномерной корой. Именно так считают многие исследователи, полагающие, что затвердевание на большую глубину — очень быстро прогрессирующий процесс. Он может занять всего несколько тысяч лет. С другой стороны, образование единого континентального блока, дрейфующего по жидкому субстрату и путем разлома породившего современные материки, было основной идеей теории образования материков Вегенера [1]. Существование такого протоматерика эта теория не объясняла, однако автор (Ярдецкий [1, 4, 7, 8]) показал, что гипотеза зонального вращения представляет простую причину образования единого материка на вращающейся жидкой планете. Поскольку, как было показано в разделе (7.7), многие особенности коры могут возникать при смещении и деформации материков, движение тела, плывущего по большой жидкой массе, становится крайне важной задачей. Существование материков и их деформации, как уже отмечалось ранее, воздействуют на фигуру планеты в целом и отвечают за локальные отклонения от более или менее правильной формы.

К сожалению, из-за большой сложности данной задачи, было сделано лишь несколько попыток рассмотреть ее в математическом виде. Некоторые замечания общего характера можно найти в исследованиях этого очень давнего периода истории Земли (У. Томсон [1, том IV, с. 189]; Джеффрис [1]). Так, эти авторы рассматривают вопрос устойчивости в случае, когда на одной стороне планеты собирается много малых плавающих тел. Автор сделал попытку изучить и решить эту задачу в общем виде (Ярдецкий [4]), но, несмотря на массу введенных упрощений, задача осталась нерешаемой. Очевидно, что при решении задач этого типа мы ищем объяснение тех характеристик фигур небесных тел, которые создаются относительными смещениями их составляющих. Таким образом, фигуры равновесия жидкой массы с плавающими телами представляют лишь вторичный интерес. Можно показать, что для обеспечения существования фигуры равновесия такого рода должны выполняться очень специфические условия. Одно из этих условий, связанное с положением оси вращения относительно осей инерции, упоминалось в разделе (1.2).

Мы без труда можем привести несколько примеров, в которых будет выполняться это условие. Сферические полярные шапки, однородные и правильной формы, помещенные на более плотную (невращающуюся) жидкую массу могут сохранять это положение, но, скорее всего, не бесконечно долго. Проблему невращающейся жидкой планеты с плавающим по ней материком исследовал Ярдецкий ([3, 6]), но, как уже говорилось, куда более важное значение на практике имеет динамическая задача. Для обретения большего понимания явлений, связанных с поведением материальной системы, состоящей из жидкой и твердой частей, использовались методы, менее точные, чем обсуждавшиеся в предыдущих главах. С помощью таких методов в рамках теории Вегенера было проанализировано существование так называемой силы «магнитного потока полюса». В геофизике было представлено несколько доказательств в попытке продемонстрировать, что если материк плывет по вращающейся жидкой планете, то составляющая силы тяжести, действующей в направлении экватора, должна смещать этот материк именно в этом направлении. Таким образом, если принять изостазию, определенную условием плавания тела, такая составляющая просто обязана появиться из-за более высокого положения плавающего тела по сравнению со стратификацией в абсолютно жидкой массе, пребывающей в состоянии равновесия. Очевидно, что выполняться будут далеко не все условия, при которых этот компонент будет направлен к экватору. Вычисление для Земли дает очень малое численное значение этой силы.

Будущие исследования позволят определить условия существования как горизонтальной, так и вертикальной сил, действующих на плавающий материк. Быть может, в этом случае будет достаточно даже приблизительного решения, однако нельзя забывать, что это решение должно удовлетворять уравнениям движения жидкой части и шести уравнениям для твердого тела. Безусловно, шансы найти такое решение увеличатся, если предположить, что движение каждой части рассматриваемых материальных систем лишь немного отличается от чистого вращения, а сама конфигурация является почти фигурой равновесия.

Очевидно, что лучшее приближение к фактической фигуре твердых небесных тел должно получаться, если принять во внимание вязкость и упругость этих тел, а также такие факторы, как тяга, создаваемая внутренними движениями, и т. п. Таким образом, мы должны иметь возможность оценить роль каждого фактора более точным образом, нежели это делалось ранее. Однако это очень сложная задача. В качестве примера можно привести исследование Прея [2] о теории сухопутных связей между существующими материками. Согласно этой теории некоторые части земной коры погрузились в вязкий субстрат и были покрыты океаном. До того времени они могли связывать между собой разные части света. Реальность такого процесса в некоторых случаях практически несомненна, однако математический анализ в том виде, в каком его представил Прей, ведет к некоторым противоречиям в порядке величины вязкости и во времени, необходимом для погружения. Обсуждаемая проблема связана с радиальным смещением кругового материка, плывущего по вязкой жидкой планете, причем инерционные слагаемые в уравнениях не учитываются. Трудности, с которыми сталкиваешься при решении этой задачи, несложно понять, если учесть, что для представления острова с помощью сферической функции требуются слагаемые вплоть до шестнадцатого порядка величины.

9.3. Твердые тела, имеющие полости, заполненные жидкостями

Новый тип задач, связанных с движением системы, состоящей из жидкой и твердой частей, и отличающихся от обсуждаемых в предыдущих разделах, включает все случаи, в которых полости твердого тела заполнены жидкостью. Отношения масс или плотностей в этих задачах могут быть произвольны.

Задача такого рода, вероятно, позволяет получить довольно хорошее приближение современного состояния многих планет, однако нельзя забывать, что фигура этой системы определялась условиями, соответствующими тому промежутку времени, когда все еще были возможны крупномасштабные деформации в твердой коре (или мантии). И одной из важнейших таких деформаций была адаптация к фигуре равновесия. Очевидно, что за изменениями формы коры последовали изменения стратификации ядра, однако все деформации, видимо, были незначительны до тех пор, пока не произошла какая-то катастрофа. Это утверждение подтверждается также тем, что даже результаты теории Клеро, являющейся ничем иным как первым приближением, достаточно хорошо согласуются с результатами наблюдений. На больших расстояниях распределение масс в теле Земли соответствует распределению масс в неоднородной фигуре равновесия. Изостатическое разделение на слои в коре не вполне совершенно, но, если, например, учесть редукцию к изостазии, когда эллиптичность Земли вычисляется на основе наблюдений, это значение согласуется со значением, предложенным Клеро. Фактические поверхности уровня Земли совсем немного отличаются от эллипсоидов и даже от множества сфер. Если необходимы определенные поправки и более точная теория, в дальнейших исследованиях следует учесть влияние различных факторов. Одним из них является возможное изменение угловой скорости в процессе затвердевания мантии.

Геофизикам хорошо известны гибкость земной коры в целом, и ее пластичность. Тенденция некоторых частей материков к восстановлению изостатического расслоения, нарушенная чрезмерной нагрузкой в последний ледниковый период, наблюдается даже в настоящее время и является очень важным явлением. Она доказывает тот факт, что мы должны искать более точные приближения для фигур планет в предположении, что их кора подвержена деформациям.

Из-за крайней сложности можно лишь надеяться на то, что в ходе будущих исследований будут найдены решения, задействующие методы, аналогичные ляпуновским (см. четвертую главу). Разложения в ряд, предложенные для потенциала тела, не ограничиваются неоднородной жидкостью.

Очевидно, что они зависят от заданного закона плотностей в теле, а также от того, что стратификация совсем немного отличается от эллипсоидальной. Представление потенциала можно использовать в задачах о твердых, сплошных и пластичных массах.

Что касается движения, отличного от вращения вокруг оси, неподвижной в пространстве и в теле, основные результаты представлены в исследованиях Жуковского [1], Вольтерра [1] и Стеклова [2]. В этих исследованиях заданы форма твердого тела и форма полости, заполненной однородной жидкостью, тогда как «деформации» допускаются только в смысле внутренних движений.

Глава 10

Жидкая масса и притягивающие центры

10.1. Общая задача

Небольшие изменения в фигуре вращающейся жидкой массы, обусловленные существованием некоторых других тел, также можно исследовать с помощью метода Ляпунова, если выполняются основные условия, соблюдения которых требует этот метод. В задаче о фигуре жидкой планеты, на которую действуют силы притяжения других членов данной «солнечной» системы, наиболее точный метод использовал Лихтенштейн [2]. В более ранних исследованиях некоторые частные случаи этой задачи решались с помощью других методов. Общеизвестными примерами таких задач служат задача о двойной звезде в ее простейшем виде, когда размеры второй звезды принимаются пренебрежимо малыми, т. е. эта звезда рассматривается как обычный притягивающий центр, или задача о приливах и отливах.

Уравнения движения вращающейся жидкой массы, на которую действуют несколько притягивающих центров, опять же имеют вид (1.1.3), однако потенциал U на этот раз складывается из потенциала U' самой жидкой массы и потенциала U'', создаваемого массами m_i, расположенными в точках $C_i(x_i, y_i, z_i)$. Тогда интеграл этих уравнений, дающий фигуры равновесия жидкой массы, имеет вид (1.1.5) или

$$f(U' + U'') + \frac{\omega^2 s^2}{2} = \int \frac{dp}{\varkappa} + \text{const}. \qquad (10.1.1)$$

Мы предполагаем, что движение жидкой массы происходит по типу вращения твердого тела, но, изменив второе слагаемое члена в левой части уравнения, как было сделано в седьмой главе, мы сможем также учесть и зональное вращение. Здесь мы рассмотрим лишь простой случай, но заранее отметим, что состояние равномерного вращения хоть идеальной, хоть вязкой жидкости способен изменить даже один-единственный, расположенный в отдалении притягивающий центр. В первом приближении уравнение (10.1.1) справедливо для каждого момента времени. Однако член U'' может зависеть от времени, и в этом случае функция ζ, определяющая отклонение поверхности уровня от эллипсоида, становится функцией времени. Более того, когда речь идет об изолированной жидкой среде, можно допустить, что ось вращения проходит через центр масс всего тела. В новой задаче центр масс жидкой среды в общем случае движется вокруг центра масс C_s всей системы. Очевидно, что относительно порядка величины участвующих масс, а также отношения наибольших размеров в жидкой массе и расстояний между центрами масс можно сделать самые разные допущения. Соответственно, необходимо использовать различные приближения, и некоторые примеры мы приведем здесь. В задаче о двойной звезде рассматривался случай равномерного вращения обеих составляющих вокруг оси, проходящей через центр масс системы. Если массы обозначить через m и m_1, а ось x направить к центру масс m_1, расстояние между C_s и C (центром масс первой составляющей) будет равно $s_c = m'l/(m + m')$, где $l = CC_1$. Поскольку в уравнении (10.1.1) s^2 — расстояние до оси вращения, второй член этого уравнения примет вид

$$\frac{\omega^2}{2}\left[\left(x - \frac{m'}{m+m'}l\right)^2 + y^2\right].$$

Однако у небесных тел периоды обращения и вращения редко бывают равны, причем угловая скорость, обусловленная обращением, имеет более высокий порядок, чем скорость вращения вокруг оси фигуры (исключениями из этого правила являются Меркурий (?), Венера (?), Луна в системе Земля–Луна).

Предположим, что центр масс всей системы расположен в непосредственной близости от центра масс жидкой массы (фигуры Солнца, на которую действуют планеты, или фигуры жидкой планеты, на которую действуют спутники). Тогда в уравнении (10.1.1) можно пренебречь расстоянием s_c. Еще одно упрощение связано с разложением в ряд потенциала U_i, созданного притягивающим центром m_i. Если l_i — расстояния от m_i до C (которая совпадает с C_s), а $l'_i = C_iP$, где P — точка жидкой массы, мы имеем

$$U'' = \sum U_i = \sum \frac{m_i}{l'_i}. \tag{10.1.2}$$

Поскольку для массы m_i

$$l_i'^2 = l_i^2 + r^2 - 2l_i r\cos\gamma_i,$$

получаем

$$U_i = \frac{m_i}{l_i}\left[1 - 2\frac{r}{l_i}\cos\gamma_i + \frac{r^2}{l_i^2}\right]^{-\frac{1}{2}}. \tag{10.1.3}$$

В сферических полярных координатах

$$\cos\gamma_i = \cos\vartheta\cos\vartheta_i + \sin\vartheta\sin\vartheta_i\cos(\psi - \psi_i), \tag{10.1.4}$$

а последний множитель в уравнении (10.1.3) можно разложить в ряд (см. уравнение (1.4.13))

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{r}{l_i}\right)P_n(\cos\gamma_i), \tag{10.1.5}$$

где P_n — полиномы Лежандра, а

$$\frac{r}{l_i} < 1.$$

Согласно (10.1.2)–(10.1.5), если количество притягивающих центров q, запишем

$$U'' = \sum_{i=1}^{q}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{m_i r^n}{l_i^{n+1}}P_n(\cos\vartheta\cos\vartheta_i + \sin\vartheta\sin\vartheta_i\cos(\psi - \psi_i)), \tag{10.1.6}$$

где (4.1.2)

$$\begin{aligned} r^2 &= x^2 + y^2 + z^2 = a^2(1+\zeta)^2 = \\ &= \{(\varrho+1)\sin^2\vartheta\cos^2\psi + (\varrho+q)\sin^2\vartheta\sin^2\psi + \varrho\cos^2\vartheta\}. \end{aligned} \tag{10.1.7}$$

Вид разложения в ряд потенциала U' жидкой массы не зависит от добавления члена U'' в (10.1.1), так что все преобразования Ляпунова, данные в четвертой главе, по-прежнему справедливы. Следовательно, функциональное уравнение (10.1.1) вновь можно свести к интегро-дифференциальному, а впоследствии и к системе интегральных уравнений типа, рассмотренного в четвертой и седьмой главах.

Согласно (4.3.16) интегро-дифференциальное уравнение имеет вид

$$R\zeta - \frac{1}{4\pi a^2}\int\frac{\overline{\zeta}'\,d\sigma'}{D(a,1)} = W + P(a) + \frac{1}{4\pi a^2\Delta}U'', \tag{10.1.8}$$

где W и $P(a)$ – выражения (4.3.17) и (4.3.18) или более общие выражения, данные в теории Ляпунова для эллипсоидов с тремя неравными осями. Чтобы из (10.1.8) получить интегральные уравнения, дающие функции, которые можно использовать для вычисления различных приближений, нужно определить несколько новых параметров. В задаче о равновесии одной жидкой массы параметр δ в законе плотности или λ в случае зонального вращения считались малыми величинами первого порядка. Однако в уравнении (10.1.6) порядок величины трех новых множителей m, $1/l_i$ и r/l_i – может выбираться произвольным образом. Первый член этого разложения – m_i/l_i в общем случае, конечно, будет переменным. Если предположить, что массы m_i движутся вокруг точки C_s по круговым траекториям, или что центры C_i неподвижны в пространстве, отношение m_i/l_i будет постоянным. Оно будет иметь малое значение, если массы m_i малы, либо если расстояния l_i велики, либо если имеет место как первое, так и второе. Однако данный фактор не влияет на относительную величину членов суммы (10.1.5), которая зависит от отношения r/l_i. Если мы пожелаем применить метод Ляпунова к уравнению (10.1.8), мы должны допустить, что функцию ζ можно разложить в кратный ряд вида

$$\zeta = \sum \zeta_{gh\ldots i}\delta_1^g\delta_2^h\ldots\delta^i, \tag{10.1.9}$$

где малые параметры δ_k выбираются таким образом, чтобы выразить действие притяжения массы m_i. Во избежание лишних трудностей, величины δ_k и δ должны иметь один порядок, а $\zeta_{00\ldots0} = 0$. Из-за (10.1.7), из которого следует, что r/l_i имеет порядок $\sqrt{\varrho+1}/l_i$, причем $\sqrt{\varrho+1}$ является самой большой полуосью свободной поверхности, естественно будет предположить, что для первого приближения множитель

$$\delta_i = \frac{m_i}{l_i}\frac{\sqrt{\varrho+1}}{l_i} \tag{10.1.10}$$

имеет порядок δ. Допущения о порядке величины трех независимых множителей m_i, $1/l_i$ и r/l_i объединяются в одно, однако очевидно, что это не единственное возможное условие. Теперь, подставляя выражение (10.1.9) в (10.1.8), с помощью преобразований, аналогичных использованным в случае единственного параметра δ, можно получить интегральные уравнения типа (7.3.14) или (7.3.7) для коэффициентов $\zeta_{gh\ldots i}$. Чтобы определить фактические значения этих коэффициентов, весьма обширные вычисления необходимы даже для первого приближения:

$$\zeta = \zeta_{10\ldots0}\delta_1\zeta_{01\ldots0}\delta_2 + \ldots + \zeta_{00\ldots1}\delta, \tag{10.1.11}$$

где число слагаемых равно $q + 1$, если имеется q притягивающих центров. Коэффициенты $\zeta_{00\ldots1} = \zeta_1$ даны Ляпуновым (см. седьмую главу), а все прочие можно вычислить по способу, предложенному автором при решении задачи о зональном вращении однородной массы (Ярдецкий [3]).

10.2. Недавние исследования

Классическую задачу Роша о фигуре однородной жидкой массы, находящейся по действием притяжения удаленного центра масс, недавно обобщил Агостинелли [1]. Он предположил, что существует множество таких притягивающих центров, и что изменениями их положения можно пренебречь при рассмотрении промежутка времени, соответствующего нескольким оборотам жидкой массы. Автор допустил, что все притягивающие центры расположены в экваториальной плоскости жидкой массы. Можно доказать, что при этих условиях движение по типу вращения твердого тела невозможно. Однако в таком случае свободная поверхность жидкости может иметь форму эллипсоида с тремя неравными осями, не меняющими величину или направление относительно притягивающих центров. В таком случае частицы жидкости двигаются по эллиптическим траекториям.

Основное уравнение этой задачи имеет вид

$$U_i + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) + C_1(x^2 - z^2) + C_2(y^2 - z^2) = \text{const},$$

где члены по C_i обусловлены притягивающими центрами. Агостинелли [3] также рассмотрел случай вращающейся неоднородной жидкости при распределении плотности по закону Роша. Чтобы получить искомое решение, он предположил существование дополнительного движения, созданного расширением жидкости. Если стратификация лишь немного отличается от эллипсоидальной, потенциал можно выразить через полярные и экваториальные поверхностные эллиптичности. Эта теория в приложении к Земле, подверженной влиянию притяжения Луны и Солнца, дает предел экваториальной эллиптичности, равный $1{,}67 \times 10^{-5}$.

Используя анализ Пуанкаре, Агостинелли [3] также обнаружил существование нескольких критических эллипсоидов, способных при небольшой деформации породить новые фигуры равновесия. Эти конфигурации, очевидно, не являются фигурами равновесия в строгом смысле, поскольку эти результаты справедливы лишь при условии, что притягивающие центры не меняют своего положения.

Обобщение, касающееся числа притягивающих центров, ведет к еще одной задаче, вызывающей большой интерес, а именно: если допустить существование очень большого числа таких центров, распределенных в пределах кольца, концентрического жидкой массе, получится задача о кольце Сатурна или о кольцеобразной туманности, в центре которой расположена звезда. Классические исследования первой задачи более подробно обсуждались в труде Аппеля ([1], том IV). Мы же упомянем лишь недавний доклад Надиля [1]. Ему удалось показать, что свободная поверхность центральной жидкой массы может принимать форму эллипсоида, если радиус кольца очень велик, а его поперечное сечение очень мало. Этот вывод справедлив, если пренебречь слагаемыми порядка выше K^2, где K — отношение максимального размера центрального тела к радиусу кольца.

Глава 11

Фигуры сжимаемых масс

11.1. Стратификация в звездах

Теории фигур небесных тел, рассмотренные в предыдущих главах, достигли очень высокого уровня математического совершенства. Они, несомненно, составили прочную основу для объяснения многих характеристик или свойств любого вида небесных тел (твердых, жидких и газообразных). Однако на примере зонального вращения мы видели, что приближение, основанное исключительно на уравнениях механики, требует дополнений. Так, нам известно, что равновесие в звезде поддерживают гравитация, градиент давления, а также излучение и распространение в ней энергии. С точки зрения механики теории, способные обеспечить лучшее объяснение стратификации в звездах, должны учитывать гораздо более высокую сжимаемость газов. При рассмотрении этого нового фактора, исследователи фигур сжимаемых масс использовали различные методы.

Обычно считается, что звезды и некоторые планеты или их атмосферы состоят из идеального газа, при этом уравнение состояния имеет вид $pv = RT$. Существует два случая, в которых некоторые задачи также можно решить с помощью теорий, упомянутых в предыдущих главах. В случае адиабатических процессов мы имеем $pv^\gamma = \mathrm{const}$, а для политропных изменений $p = K\varkappa^{1+(1/n)}$ ($n =$ коэффициент политропии). Даже если речь идет о так называемом обобщенном политропном газе $p = K\varkappa^{1+1/(n(\kappa))}$, соотношение давления и плотности имеет вид $p = \varphi(\varkappa)$, а движение массы является баротропным. Основное уравнение теории равновесия и зонального вращения (1.1.5) справедливо как для адиабатических, так и для политропных состояний, и именно оно определяет стратификацию. Однако одно различие все же имеется. Мы уже не можем использовать условие равных объемов при деформации фигуры равновесия, поскольку в сжимаемом газе изменение поля давления способно создать существенное изменение плотности и объема. Таким образом, в качестве дополнительного условия равенство объемов следует заменить равенством масс.

Вместо этих уравнений, в задаче о стратификации в газообразном небесном теле также можно использовать другие условия, например, в случае абсолютного равновесия мы имеем три уравнения с тремя переменными $p, \varkappa, U$ (если принять сферическое расслоение):

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{dp}{dr} = f\frac{dU}{dr}, \quad \nabla^2 U = -4\pi\varkappa, \quad p = K\varkappa^{1+1/(n(\kappa))}. \tag{11.1.1}$$

Первое уравнение представляет собой частный случай уравнения (1.1.2), тогда как второе уравнение — это уравнение Пуассона. Следовательно, подстановка

$$\varkappa = \theta^n, \qquad \frac{n+1}{4\pi f}K = \alpha^2, \qquad \xi = \frac{r}{\alpha} \tag{11.1.2}$$

преобразует уравнение Пуассона в уравнение Эмдена

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n, \tag{11.1.3}$$

дающее функцию $\theta = \theta(\xi)$, т. е. закон плотностей $\varkappa = \varkappa(r)$ для заданной $n(\varkappa)$ и граничных условий.

В следующем приближении, как известно, в первое условие равновесия (11.1.1) добавляется давление p^*. Тогда если m_r — масса, ограниченная сферой радиуса r, то

$$\frac{1}{\varkappa}\frac{dP}{dr} = \frac{1}{\varkappa}\frac{d}{dr}(p+p^*) = -f\frac{m_r}{r^2}. \tag{11.1.4}$$

Это эквивалентно допущению о том, что в уравнение (1.1.2) вводится дополнительная сила grad p^*. Мы не намерены обсуждать здесь все гипотезы о генерации энергии и ее распространении и поглощении в газе, которые позволили бы выразить p^* через r. В астрофизике рассматривались разные модели. Каждый конкретный вид $p^*(r)$ связан с некоторыми допущениями о задействованных физических процессах и служит более или менее точным приближением реального состояния звезд. В настоящее время самым важным разделом этой теории являются ядерные процессы. Задача о стратификации в звездах в этом виде заключается не в определении формы поверхностей уровня (или равного давления, или плотности), эта форма известна, а в определении значения плотности (или давления).

Дальнейшее исследование стратификации сталкивается с такой новой сложностью. Если в уравнение состояния вводится новая переменная, например T, уравнения гидромеханики уже более не являются полной системой условий, определяющих все переменные (включая T). Дюгем [1] показал, что необходимое шестое уравнение получится из термодинамики. Тем не менее, насколько известно автору, это предложение не было использовано в общем смысле. Напротив, ряд общих выводов был сделан непосредственно из уравнений гидродинамики. Если $\varkappa$ не является функцией от одной переменной p, правый член уравнения (11.1.4) не будет точным дифференциалом, и уравнение (11.1.5) не получится даже при постоянной ω. Три множества поверхностей $\varkappa = \mathrm{const}$, $p = \mathrm{const}$ и $U + Q = \mathrm{const}$ уже не будут совпадать, так что точный смысл термина стратификация будет утрачен. Движение такой массы называется бароклиной, однако мы всегда должны дополнительно пояснять, что подразумевает в этом случае понятие стратификации. При этом мы без труда можем получить несколько полезных соотношений. Так, записав уравнения (1.1.3), например, для цилиндрических координат, и допустив вращательную симметрию (существование которой доказано), мы получаем первое уравнение в виде

$$-\omega^2 s = f\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial s}.$$

Исключая p из этого уравнения, а также из третьего (1.1.3), получаем следующее условие для ω:

$$\varkappa\omega^2 = \frac{f}{s}\int\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial s}\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{\partial\varkappa}{\partial z}\frac{\partial U}{\partial s}\right)dz + \mathrm{funct}(s) \tag{11.1.5}$$

(Пицетти [1]). Исключая U из (1.1.3), мы, к примеру, получим

$$x\frac{\partial\omega^2}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varkappa}\right) - \frac{\partial p}{\partial z}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varkappa}\right).$$

Из этого и двух других уравнений следует, что

$$\mathrm{grad}_z\,\omega^2 \times \mathbf{r} = \nabla\frac{1}{\varkappa} \times \nabla p, \tag{11.1.6}$$

где grad_z — частный градиент в направлении z. Таким образом, изобарическая и изостерическая поверхности совпадают только при $\partial\omega/\partial z = 0$. Условие (11.1.5) говорит о том, что в общем случае, если учитывать симметрию относительно экваториальной плоскости, $\omega = \omega(s^2, z^2)$. Это вывод, сделанный из условия (11.1.6), представляется довольно неожиданным. Факт несовпадения изобарической и изостерической поверхностей в жидкой массе обусловлен особым видом физического закона, связанного со свойством этой массы, а именно с уравнением состояния, например $p = p(\varkappa, T)$. Как утверждается во многих исследованиях, движение такой массы по типу вращения твердого тела является условием, достаточным для совпадения этих двух множеств поверхностей, так что от температуры здесь вообще ничего не зависит. Безусловно, мы не получим противоречия, даже если изотермические поверхности будут соответствовать распределению температур, скажем $T = \mathrm{const}$ на поверхности $\varkappa = \mathrm{const}$. К тому же семейству будут принадлежать и поверхности $p = \mathrm{const}$, причем каждую из переменных можно будет выразить через параметр типа ляпуновского a: $\varkappa = \varkappa(a)$, $p = p(a)$, $T = T(a)$. Тогда вращение будет баротропным. Однако во избежание противоречия в случае бароклинного вращения нам не следует забывать о том, что такие зональные движения представляют лишь одну часть общей циркуляции, второй составляющей которой являются меридиональные потоки. В теориях стратификации в газообразных звездах обычно считается, что в реальности такие звезды пребывают в состоянии конвективного равновесия. Восходящие теплые массы расширяются адиабатически, тогда как снижающиеся массы адиабатически сжимаются, но согласно только что упомянутому допущению эти потоки не нарушают форму слоев $\varkappa = \mathrm{const}$ и $p = \mathrm{const}$. Если данное описание точно, то составляющие ускорения, созданного этими радиальными движениями, необходимо включить в основные уравнения, даже если мы пренебрежем некоторыми отличиями в движении по параллели. Таким образом, уравнения (1.1.3) примут вид

$$\begin{gathered}-\omega^2 x + a_x = f\frac{\partial U}{\partial x} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad -\omega^2 y + a_y = f\frac{\partial U}{\partial y} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial y} \\ a_z = f\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial z},\end{gathered} \tag{11.1.7}$$

или, в случае вращательной симметрии,

$$\begin{gathered}-\omega^2 s + a_s = f\frac{\partial U}{\partial s} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial s}, \quad 0 = f\frac{\partial \lambda}{\partial y} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial \lambda}, \\ a_z = f\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{1}{\varkappa}\frac{\partial p}{\partial z},\end{gathered} \tag{11.1.7$'$}$$

где λ — широта. Если из (11.1.7) исключить U, получится

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{\partial p}{\partial y} = -y\frac{\partial \omega^2}{\partial z} + \frac{\partial a_y}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{\partial p}{\partial z} = -x\frac{\partial \omega^2}{\partial z} + \frac{\partial a_z}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\varkappa}\right)\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial x}.\end{gathered} \tag{11.1.8}$$

Эти условия совпадут с условиями (11.1.6), только если

$$\operatorname{rot} \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} = 0. \tag{11.1.9}$$

В общем случае $\operatorname{rot} \mathbf{a} \neq 0$, и вместо (11.1.6) мы имеем

$$\nabla \frac{1}{\varkappa} \times \nabla p = \operatorname{grad}_z \omega^2 \times \mathbf{r} + \operatorname{rot} \mathbf{a}. \tag{11.1.10}$$

Обращение в нуль $\operatorname{grad}_z \omega^2$ уже не ведет к совпадению изобарической и изостерической поверхностей. Этот же вывод справедлив и для вязких жидкостей.

Мы упоминали о методе Бонди и Литтлтона для исследования внутренних движений в вязкой жидкости, заключенной в твердом ядре (девятая глава). Для обсуждения проблемы таких внутренних движений в газообразной звезде следует также учесть тот факт, что ее стратификация и граничная поверхность неизвестны. В случае сжимаемых масс некоторые приближения были сделаны только для случая малых деформаций политропических сфер, обусловленных очень медленным вращением по типу твердого тела. При этом делаются такие допущения:

$$p = K\varkappa^{1+(1/n)}, \quad \varkappa = \varkappa(r, \vartheta) = \widehat{\theta}^n, \quad n = \text{const}. \tag{11.1.11}$$

Если положить $\cos\vartheta = \overline{\mu}$ и использовать подстановку, представленную вторым и третьим уравнениями (11.1.2), плотность будет иметь вид $\varkappa = \varkappa(\xi, \overline{\mu})$. Поскольку стратификация, т. е. поверхности $\varkappa = \text{const}$, изменяется при изменении угловой скорости ω, предполагается, что при малых значениях ω плотность можно разложить в степенной ряд

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varkappa_1 \frac{\omega^2}{2\pi f} + \varkappa_2 \frac{\omega^4}{4\pi^2 f^2} + \dots. \tag{11.1.12}$$

Предположим, что в первом приближении, если пренебречь ω^4 и более высокими степенями ω, можно взять

$$\widehat{\theta}^n \approx \theta^n + \psi \frac{\omega^2}{2\pi f} n\theta^{n-1}, \tag{11.1.13}$$

где θ — решение уравнения (11.1.3), $\varkappa_1 = n\theta^{n-1}\psi$ и $\psi = \psi(\xi, \overline{\mu})$. Если из уравнения (11.1.1) исключить U и p, получится уравнение для функции ψ. Это уравнение можно записать в виде (Милн [1], Чандрасекхар [1] и другие статьи)

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^2\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\right)+\frac{1}{\xi^2}\frac{\partial}{\partial\overline{\mu}}\left[(1-\overline{\mu}^2)\frac{\partial\psi}{\partial\overline{\mu}}\right]=-n\theta^{n-1}\psi+1, \qquad (11.1.14)$$

если использовать выражение для ∇^2 в сферических координатах. Решение $\psi=\psi(\xi,\overline{\mu})$ этого уравнения определит стратификацию (11.1.12). Свободная поверхность, соответствующая граничному условию $\varkappa=\widehat{\theta}^n=0$, представляет собой сфероид. Чтобы решить уравнение (11.1.14), Чандрасекхар предположил, что ψ можно представить с помощью ряда

$$\psi=\psi_0(\xi)+\sum_{i=1}^{\infty}A_i\psi_i(\xi)P_i(\overline{\mu}), \qquad (11.1.15)$$

где P_i — полиномы Лежандра. Подставляя (11.1.15) в уравнение (11.1.14), мы получаем систему уравнений, позволяющих вычислить функции $\psi_i(\xi)$. Для нахождения коэффициентов A_i Чандрасекхар ввел два новых условия. Он принимает равные выражения для внутреннего и внешнего потенциалов. Первые производные потенциала также принимаются равными на границе первой сферы Эмдена $\xi=\xi_1$, которая должна быть фигурой невращающейся массы. При этих условиях решение Чандрасекхара имеет вид

$$\widehat{\theta}=\theta(\xi)+\frac{\omega^2}{2\pi f}\left[\psi_0(\xi)-\frac{5}{6}\frac{\xi_1^2}{3\psi_2(\xi_1)+\xi_1\psi_2'(\xi_1)}\psi_2(\xi_1)P_2(\overline{\mu})\right]. \qquad (11.1.16)$$

Крат [1] показал, что условия, введенные Чандрасекхаром, могут привести к серьезным ошибкам, поскольку в этом случае, судя по всему, не учитывается действие масс, внешних по отношению к сфере $\xi=\xi_1$. Более того, возникает вопрос, оба ли ряда сходятся на этой сфере. Замечание Пуассона о сферическом слое (1.4.15), в котором выражения (1.4.13), данные Лапласом, не действуют, вполне может быть справедливо и в данном случае. Было сделано несколько попыток заполнить пробел между этими двумя выражениями, однако этот вопрос по-прежнему нельзя считать достаточно ясным. Сходимость основного ряда (11.1.12) в этой теории фигур сжимаемых масс просто принимается как данность и впоследствии ее правильность нигде не доказывается. Крат [1] предложил обобщение результатов Чандрасекхара для случая зонального вращения:

$$\omega^2=c_0\omega_0^2+\sum_{i=1}^{\infty}c_i\omega_i^2P_i(\overline{\mu}), \qquad \omega_0=\omega_0(\xi), \qquad \omega_i=\omega_i(\xi).$$

В предыдущем исследовании (Крат [1]) он отметил, что если заданный закон вращения политропной газовой массы несовместим с условиями ее равновесия, то он будет справедлив для любой газовой массы (обобщенный политроп). В качестве примера приводится закон $\omega^2 = \omega_1^2 \pm \omega_2^2 s^2$, который не удовлетворяет условиям равновесия политропической массы (несмотря на существование при $a_s = a_z = 0$ интеграла (11.1.7′)).

Для сжимаемых газов в звездах единственной возможностью представляется бароклинное движение. Следовательно, будет очень важно найти точные методы, которые позволят нам определить все три множества поверхностей, а именно $\varkappa = \mathrm{const}$, $p = \mathrm{const}$ и $Q + fU = \mathrm{const}$, с любым желаемым приближением.

11.2. Замечания по проблеме двойных звезд

В своем общем виде эта задача содержит столько сложностей, что до настоящего момента не было найдено метода, который позволил бы получить ее решение. В предыдущем разделе мы видели ряд упрощений, используемых в случае медленно вращающейся изолированной массы сжимаемого газа. Сложности возникают, в первую очередь, потому, что компоненты двойной звезды сжимаемы и неоднородны. Из-за обращения вокруг общего центра масс важным фактором является вращение обеих звезд с разными угловыми скоростями; кроме того, в замкнутой системе приливы и отливы могут доминировать над всеми прочими явлениями. Дарвин рассмотрел вращение всей этой системы по типу твердого тела. В качестве первого приближения для однородных несжимаемых компонент были определены эллипсоидальные конфигурации. Однако можно ожидать, что в газообразной звезде плотность существенно увеличивается в направлении от свободной поверхности к центру. Следовательно, бóльшая часть массы распределена в «ядре», так что реальная конфигурация будет отличаться от эллипсоидальной массы. Учитывая это, более важной оказывается модель Роша. В случае двойной звезды потенциал, созданный центробежными силами, необходимо объединить с гравитационным потенциалом двух материальных точек. Тогда эта модель фактически соответствует ограниченной задаче трех тел. После определения из нее множества эквипотенциальных поверхностей были получены некоторые условия для траекторий движения частиц в атмосферах звезд, и оказался вероятным поток через «критические» поверхности. Однако звезды очень сильно отличаются от модели Роша, поэтому необходимы более точные приближения.

Для политропических звезд особую важность приобрели две частные задачи. Задачу о приливах и отливах, которая сводится к прямолинейному движению первого компонента в направлении второго, исследовал Чандрасекхар [1]. Для получения решения были использованы ряды, аналогичные упомянутым в предыдущем разделе, и коэффициенты A_i, определенные через параметр ν, равный отношению радиуса невозмущенной конфигурации к расстоянию между центрами масс компонент звезды. Можно показать, что вплоть до ν^5 деформации, созданные такими приливами и отливами, могут накладываться на деформации, возникающие из-за перехода двойной звезды к форме, соответствующей вращению твердого тела. Если пренебречь членами порядка ν^4 и ν^5, фигуры звезд можно приблизить с помощью эллипсоидов. Дальнейшим теоретическим прогрессом мы обязаны Чандрасекхару [1], Крату [1], Расселу [1], Коулингу [1] и Вальтеру [1].

С помощью другого метода проблему двойных звезд рассмотрел Лихтенштейн [1]. Предложив более точную формулировку самой задачи, в математическом виде этот автор представил только общие условия.

Метод Ляпунова также можно применить к задаче о двойной звезде, и мы запишем общие уравнения. Если допустить, что плотности обеих компонент являются функциями от давления $\varkappa_1 = f_1(p)$, $\varkappa_2 = f_2(p)$, уравнения движения жидкостей в двойной звезде имеют вид

$$\frac{d^2\mathbf{r}_i}{dt^2} = \operatorname{grad}\left(fU_i - \int \frac{dp}{\varkappa_i}\right), \quad i = 1, 2, \tag{11.2.1}$$

из-за (1.1.2). Следовательно, при обозначении через $-Q_i$ потенциал ускорений

$$fU_i + Q_i = \frac{dp}{\varkappa_i} + \text{const} \tag{11.2.2}$$

на поверхности уровня в каждой компоненте. Поскольку участвует всего две массы, потенциал имеет вид

$$U_i = \overline{U} + \overline{\overline{U}}, \tag{11.2.3}$$

т. е. равен сумме потенциалов, созданных двумя компонентами двойной звезды. Чтобы использовать разложения в ряд Ляпунова, нужно удовлетворить некоторым требованиям. Основное разложение (4.1.15)–(4.1.16) справедливо для малых (не бесконечно малых) значений функции ζ, определяющей деформацию эллипсоидальной стратификации. Это можно сделать либо для средних изменений плотности от центра до свободной поверхности каждой компоненты при отсутствии ограничений на величины осей эллипсоидов $E_1(\sqrt{\varrho_1 + 1}, \sqrt{\varrho_1 + q_1}, \sqrt{\varrho_1})$ и E_2 соответственно (см. раздел 4.1), либо при очень медленном вращении каждой компоненты.

Во втором случае эллипсоиды E_1 и E_2 приближаются к сферической форме, и даже при очень большом увеличении плотности от свободной поверхности к центру поверхности уровня могут быть сфероидами, т. е. функция ζ очень мала. В обоих случаях расстояния между центрами масс компонент должны быть достаточно велики, чтобы не создать существенной деформации в стратификации каждой. При этих условиях, мы можем записать уравнения (4.1.15)–(4.1.16) для каждой компоненты, т. е.

$$\overline{U} = \sum \overline{U}_i, \qquad \overline{\overline{U}} = \sum \overline{\overline{U}}_i, \tag{11.2.4}$$

где слагаемые $\overline{U}_i$ имеют порядок ζ_1^i, а $\overline{\overline{U}}_i$ — порядок ζ_2^i. ζ_1 и ζ_2 — функции, в которых (4.1.2) определяет стратификацию первой и второй звезды соответственно. Функции U будут заменяться функциями V и Φ (раздел 4.3), если законы плотностей даны в виде

$$\varkappa_i = 1 + \delta_i \varphi_i(a_i). \tag{11.2.5}$$

Чтобы упростить эту задачу, можно было бы допустить, что $\delta_1 = \delta_2 = \delta$, но функции φ_1 и φ_2 не одинаковы, а параметры a_1 и a_2 в общем случае должны определяться двумя различными условиями. Если мы возьмем определение a_i, как данное в разделе (4.1), этими условиями являются уравнения Ляпунова (4.1.6), записанные для каждой компоненты, т. е.

$$\int \zeta_i \, d\sigma = -\int \zeta_i^2 \, d\sigma - \frac{1}{3} \int \zeta_i^3 \, d\sigma. \tag{11.2.6}$$

Если рассмотреть звезды, равенство масс должно заменить равенство объемов, ограниченных поверхностями F_a и E_a, как упоминалось выше (Крат [1, стр. 148]).

Записав элемент объема (4.1.4) в виде

$$dV = \frac{\Delta}{3} \frac{\partial}{\partial a} [a^3 (1 + \zeta)^3] \, da \, d\sigma \tag{11.2.7}$$

и положив в этом выражении $\zeta = 0$ для эллипсоида E_a, мы получим (из-за нового определения параметра a)

$$\int_0^a \int_\Sigma \varkappa \, dV = \Delta \int_0^a \varkappa \int_\Sigma a^2 \, da \, d\sigma = 4\pi\Delta \int_0^a \varkappa a^2 \, da. \tag{11.2.8}$$

Если подставить выражение (11.2.5), слагаемое, равное единице, очевидно, породит все слагаемые в (4.1.6). Поправку, обусловленную вторым членом в (11.2.5), несложно вычислить, и мы имеем два следующих условия для функций ζ_i:

$$\int \zeta_i d\sigma = -\int \zeta_i^2 d\sigma - \frac{1}{3}\int \zeta_i^3 d\sigma + \\ + \frac{\delta_i}{a_i^3}\int_0^{a_i} \varphi(a_i)da_i \int \frac{\partial}{\partial a_i}[a_i^3(\zeta_i + \zeta_i^2 + \frac{1}{3}\zeta_i^3)]d\sigma. \tag{11.2.9}$$

Это уравнение нужно использовать вместо (11.2.6), когда функциональные уравнения (11.2.2) будут преобразованы в интегро-дифференциальные, а впоследствии в интегральные.

В более общих случаях крайнюю сложность может представлять потенциал ускорения Q_i, если таковой существует. Некоторые приближенные выражения этого потенциала можно записать, только если пренебречь некоторыми составляющими ускорения. Принимая возможность существования некоторых неизменных конфигураций, вращение всей системы по типу твердого тела дает следующее простое выражение:

$$Q_i = \frac{\omega^2 s_i^2}{2}, \tag{11.2.10}$$

где s_i обозначает расстояние от частицы до оси вращения, проходящей через центр масс двойной звезды. Однако движение центров масс не является строго кеплеровым. Если взять такое приближение, можно положить, что

$$\omega^2 = f\frac{m_1 + m_2}{l_0^3}, \tag{11.2.11}$$

где m_1 и m_2 — массы компонент двойной звезды, а l_0 — расстояние между их центрами. Это расстояние является фактором, влияющим на приближение в уравнениях (11.2.2), и используется для определения вышеупомянутого параметра ν. Очевидно, что отношение наибольшего линейного размера в компоненте к расстоянию l_0 будет определять предельный член, используемый в приближении. В модели с однородными компонентами единственным используемым параметром будет ν, даже для близких двойных звезд. Для неоднородных компонент придется определять относительный порядок δ_i и ν, поскольку для преобразования уравнений (11.2.2) нам придется использовать ряды вида

$$\zeta_i = \sum \zeta_{i,gk}\delta_i^g \nu^k \tag{11.2.12}$$

и объединять члены одного порядка.

Два уравнения для функций ζ_1 и ζ_2,

$$
\begin{aligned}
f\overline{U} + f\overline{\overline{U}} + Q_1 &= \int \frac{dp}{\varkappa_1} + \text{const} \quad \text{для } S_1, \\
f\overline{U} + f\overline{\overline{U}} + Q_2 &= \int \frac{dp}{\varkappa_2} + \text{const} \quad \text{для } S_2,
\end{aligned}
\tag{11.2.13}
$$

конечно, очень упрощены в модели Роша, где потенциал второй компоненты сводится к потенциалу материальной точки, а жидкая среда считается сжимаемой однородной жидкостью. Тогда мы имеем

$$
\begin{aligned}
f\overline{U} + f\frac{m_2}{l'} + Q_1 &= \frac{p}{\varkappa_1} + \text{const} \quad \text{для } S_1, \\
f\frac{m_1}{l'} + f\overline{\overline{U}} + Q_2 &= \frac{p}{\varkappa_2} + \text{const} \quad \text{для } S_2,
\end{aligned}
\tag{11.2.14}
$$

Обычным приближением для фигур служат эллипсоиды, однако определенных успехов можно добиться подстановкой в (11.2.14) разложения в ряд Ляпунова для $\overline{U}$ в терминах ζ_1 или для $\overline{\overline{U}}$ — в терминах ζ_2. В случае (11.2.14) функции ζ_1 и ζ_2 удовлетворяют двум разным уравнениям, но даже в этом простейшем случае решение уравнения вида (11.2.14) потребует очень длинных вычислений. Поэтому сейчас мы ограничимся последним замечанием, касающимся характера конденсации в звезде, заданного законом (11.2.5). Его можно записать в виде, представляющем любую степень конденсации, если параметр δ не обязательно является малым числом. Для закона $\varkappa = 1 + \delta(H_1 - H_2 a^{2n})$ и при любом $n > 0$ пределы плотности определяются в центре и на свободной поверхности. Они имеют вид $\varkappa_0 = 1 + \delta H_1$, $\varkappa_{f.s.} = 1 + \delta H_1 - \delta H_2$, но, поскольку $0 < a < 1$, чем больше значение n, тем медленнее происходит изменение плотности в «ядре» звезды и тем быстрее падает плотность в «мантии». Возможно, этот закон плотностей способен более точно выразить реальное распределение плотности в звезде, при этом не слишком увеличив математические сложности решения.

Библиография

Agostinelli, C.

[1] Configurazioni di equilibrio di una massa liquida, omogenea attratta da piu centri lontani con la legge di Newton. Mem. Accad. Sci. Torino, Ser. 2, 71, 1–48 (1942).

[2] Nuovi contributi alia teoria della figura dei pianeti. Atti Accad. Sci. Torino, 79, 179–224 (1943–44).

[3] Figure di equilibrio prossime all'ellipsoide di una massa liquida omogenea attrata da piu corpi lontani con la legge di Newton. Rend. Circ. Matem. Palermo, Ser. II, 1, 281–322 (1952).

Appell, P.

[1] Traité de Mécanique Rationnelle, Gauthier-Villars, Paris, T. IV, Fasc. I (1921, 1932), Fasc. II (1924). [Русск. пер.: Аппель П. Теоретическая механика, т. I, II. М.: Физматгиз, 1960.]

[2] Équation fonctionnelle pour l'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation sous l'attraction newtonienne de ses parties. C. R. Acad. Paris, 156, 587 (1913).

Bilimovitch, A.

[1] Über den Begriff der Erdachse. Gerl. Beitr. zur Geophysik, 33, 181 (1931) и другие статьи.

Belopolsky, A.

[1] Über die Analogie zwischen den Bewegungen auf der Sonnenfläche und den Zirculationen in einer rotierenden flüssigen Kugel. A. N., 2954.

Bjerknes, V.

[1] Solar Hydrodynamics. Ap. J., 64, 93–121 (1926).

Boggio, T.

[1] Sul moto di una massa liquida che conserva forma ellipsoidale. Rend. Accad. Lincei, [5] 21, (1921).

Bondi, H., Lyttleton, R. A.

[1] On the Dynamical Theory of the Rotation of the Earth. Part I. Proc. Cambridge Phil. Soc, 44, 345–359 (1948); Part II. *Ibid.*, 49, 498–515 (1953).

Bruns, H.

[1] Figur der Erde, 1878.

Brillouin, M.

[1] Instabilité inévitable d'un liquide pesant qui tourne, sans mouvement relatif, avec un noyau solide qu'il entoure. Cons'équences océanographiques et géodésiques. C. R. Acad. Paris, 207, 816 (1938).

Bullen, K. E.

[1] Monthly Nat. R. Astr. Soc. Geophys. Suppl., 3, 395 (1936).

[2] An Introduction to the Theory of Seismology, 2nd ed. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1953.

Carleman, T.

[1] Über eine isoperimetrische Aufgabe und ihre physikalischen Anwendungen. Math. Z., 3, 1–7 (1919).

Cartan, E.

[1] Sur les petites oscillations d'une masse fluide. Bull sci. math., 2-e sér. 46, 317, 356 (1922).

Chandrasekhar, S.

[1] The Equilibrium of Distorted Polytropes. Part I. MNRAS, 93, 390 (1933); Part II. *Ibid.*, 444; Part III. *Ibid.*, 462.

[2] An Analysis of the Problem of Stellar Atmospheres. Ap. J., 11, 550–596 (1934).

[3] An Introduction to the Study of Stellar Structure. Univ. Chicago Press, Chicago, 1939.

[4] The Thermal Instability of a Fluid Sphere Heated Within. Phil. Mag., 43, 1317 (1952).

[5] The Onset of Convection by Thermal Instability in Spherical Shells. Phil. Mag., (7), 44, 233–241 (1953).

Chetaiev, N. G.

[1] On the Stable Figures of Equilibrium of a Homogeneous Liquid Mass Rotating Under the Action of Forces of Radiation Compression Towards the Liquid's Center. Izv. Phys. Math. Soc, Univ. Kazan, 27, 49–94 (1926).

[Русск. пер.: Четаев Н. Г. Об устойчивых фигурах равновесия некоторой однородной массы вращающейся жидкости под действием сил лучистого сжатия к центру тяжести, с. 157–160. Изв. Физ.-матем. о-ва при Казан. ун-те, т. 1, вып. 3, 1926).]

Clairaut, A. C.

[1] La théorie de la figure de la terre tirée des principes de l'hydrodynamique, Paris, 1743; Ostwald's Class. Exact. Wiss., 189, Leipzig, 1913. [Русск. пер.: Клеро А. Теория фигуры Земли, основанная на началах гидростатики. М.: Из-во АН СССР, 1947. 358 с.]

Clebsch, A.

[1] Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen. Crelle J., 56, 1 (1859).

Courant, R., Hilbert, D.

[1] Methoden der mathematischen Physik. Vol. I, Springer, Berlin, 1937. [Русск. пер.: Курант Р. и Гильберт Д. Методы математической физики. М.: Гостехиздат, 1951.]

Cowling, T. G.

[1] On the Motion of the Apsidal Line in Close Binary Systems. MNRAS, 98, 734 (1938).

Crudeli, U.

[1] Su le figure di equilibrio, derivate dalla ellipsoide, di un corpo fluido, omogeneo ed incompressibile, dotato di moto rotatorio uniforme. Nuovo Cimento, Ser. V, 16, 1 (1908).

[2] Nuovo limite superiore della velocita angolari dei fluidi omogenei, rotanti uniformamente... Rend. Accad. Lincei, 19_1, 666 (1910); *ibid.*, 19_2, 41 (1910).

[3] Sul theorema di Stokes per il potenziale all'esterno di un astro. Determinazione della gravita superficiale. Mem. Soc. Astr. Ital., VII-2, 1 (1933).

[4] Sulle velocità angolari degli astri rotanti nella teoria dell'equilibrio relativo. Rend. Circ. Mat. Palermo, 57, 1 (1933).

[5] Problema esistenziale nella ricerca di figure d'equilibrio dei fluidi rotanti. Rend. Circ. Mat. Palermo, 59, 1 (1935).

Daly, R. A.

[1] Origin of «Land Hemisphere» and Continents. Am. J. Sci., 249, 903–924 (1951).

Danoz, N.

[1] Application de la méthode de cavité à certains mouvements de seconde espèce. C. R. Soc. Phys., Geneve, 47, 88 (1930).

Darwin, G. H.

[1] The Theory of the Figure of the Earth Carried to the Second Order of Small Quantities. M. N., 60, 82–124 (1900); Sci. Pap., III, 78.

[2] On the Influence of Geological Changes on the Earth's Axis of Rotation. Phil. Trans. R. S. London A., 167, 271 (1877); Sci. Pap., III (1910).

[3] On the Pear-shaped Figure of Equilibrium of a Rotating Mass of Liquid. Phil. Trans., 198A, 301 (1901); Sci. Pap., III, 288.

[4] The Stability of the Pear-shaped Figure of Equilibrium. Sci. Pap., III, 317.

Darwin, G. H., Hough, S. S.

[1] Bewegung der Hydrosphäre. Enc. Math. Wiss., Vol. VI, 1, 6.H.1, 83.

Dedekind, R.

[1] Zusatz zu der vorstehenden Abhandlung (of Dirichlet). Crelle J., 58, 217–228 (1861). [Русск. пер.: Дедекинд Р. Дополнение к предшествующей статье // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. С. 19–58.]

Dirichlet, G.

[1] (Lejeune) Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik. Crelle J., 58, 181–216 (1861). [Русск. пер.: Дирихле Л. Исследование одной задачи гидродинамики // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. С. 19–58.]

Dive, P.

[1] Rotations internes des astres fluides. Blanchard, Paris, 1930.

[2] La dérive des continents et les mouvements intra-telluriques. Dunod, Paris, 1933.

[3] De l'impossibilité d'un stratification ellipsoidale dans un fluide doué de rotations barotropes permanents. Bull. Sci. Math., [2] 76, 38 (1952) и другие статьи.

Duhem, P.

[1] Hydrodynamique, élasticité, acoustique. Paris, 1891.

Eddington, A. S.

[1] Circulating Currents in Rotating Stars. Observ., 48, 73 (1925).

[2] Internal Circulation in Rotating Stars. MNRAS, 90, 54 (1929).

[3] The Internal Constitution of the Stars. Cambridge, Univ. Press, Cambridge, 1926.

Emden, R.

[1] Gaskugeln. Teubnez, Leipzig, 1907.

Fessenkov, V. G.

[1] On the Problem of Cosmogony in Modern Astronomy. Astr. J., Moscow, 26, 67 (1949).

Garten, V.

[1] Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Rochesche Satelliten und ringförmige Gleichgewichtsfiguren mit Zentralkörpern. Math. Z., 35, 684 (1932).

Garten, V., Maruhn, K.

[1] Untersuchungen über die Gestalt der Himmelskörper. Eine aus zwei getrennten Ringkörpern bestehende Gleichgewichtsfigur rotierender Flüssigkeit. Math. Z., 35, 154 (1932).

Ghosh, N. L.

[1] Spheroidal Configuration Under the Law of Density... Bull. Calcutta Math. Soc, 42, 101 (1950).

[2] Equilibrium of Rotating Fluid Bodies in Confocal Stratifications. Bull. Calcutta Math. Soc, 42, 227 (1950).

[3] On the Equilibrium of a Thin Atmosphere Around a Heavy Central Core: Spheroidal and Anchor-ring Configurations. Bull. Calcutta Math. Soc, 43, 22 (1951).

[4] Equilibrium of Rotating Fluids Under the Quadratic Law of Stratifications and the Existence of Equatorial Acceleration. Proc. Nat. Inst. Sci. India, 17, 391 (1950).

Globa-Mikhailenko, B.

[1] Modification des figures ellipsoidales d'équilibre d'une masse fluide en rotation sous l'action de la pression capillaire. C. R. Paris, 160, 510 (1915).

Griggs, D.

[1] A Theory of Mountain-building. Am. J. Sci., 237, 611 (1939).

Gutenberg, B.

[1] Internal Constitution of the Earth. Dover Publications, New York, 1951.

Hales, A. L.

[1] Convection Currents in the Earth. MNRAS, Geophys. Suppl., 3, 372 (1936).

Hills, G. F. S.

[1] The Granitic and Basaltic Areas of the Earth's Surface. Geol. Mag., 71, 275 (1934).

Hölder, E.

[1] Zur Theorie inhomogener Gleichgewichtsfiguren. Math. Z., 36, 563 (1933) и другие статьи.

Hopfner, F.

[1] Physikalische Geodäsie, Akad. Verlag, M. B. H., 1933.

Humbert, P.

[1] Sur la figure piriforme d'équilibre d'une mass fluide. C. R. Paris, 160, 509 (1915) и другие статьи в C. R. Paris, (1915–20).

[2] Sur les surfaces de Poincaré. Thèse, Paris, 1918.

Jardetzky, W.

[1] Zonal Rotation of a Planet and the Formation of Continents (на сербском языке). Glas. Serb. Acad. Sci., 134, 151 (1929).

[2] Über die Ursachen der Spaltung und Verschiebung der Kontinente. Gerl. Beitr. z. Geophys., 26, 167 (1930).

[3] Статьи, опубликованные в 1930–1935 гг., цитируются в следующей работе.

[4] Recherches mathématiques sur l'évolution de la Terre. R. Serb. Acad. Belgrade, Spec. Ed. 107 (1935).

[5] Remarque sur les figures d'une masse fluide en rotation permanente. Bull. R. Serb. Acad., A4, 155 (1938).

[6] Sur les conditions d'équilibre d'une masse fluide avec un flotteur. Bull. R. Serb. Acad., A4, 149 (1938).

[7] Bewegungsmechanismus der Erdkruste. Österr. Akad. Wiss. Math. Phys. Kl. Denkschriften, 108–3, Wien (1948).

[8] On the Dynamics of the Earth's Crust. Bull. Soc. Amis. Sci. Poznan, IX, 3 (1948).

[9] Sur la migration des pôles. Bull. Soc. Amis. Sci. Poznan, X, 75 (1949).

[10] On the Rotation of the Earth During Its Evolution. Trans. Am. Geophys. Un., 30, 797 (1949).

[11] The Problem of Atlantis. Proc. Intern. Congr. Math., Cambridge Mass., 1950.

[12] The Problem of Mountain Chains. Trans. Am. Geophys. Un., 31, 901 (1950).

[13] Convection and Zonal Rotation in Celestial Bodies. Trans. New York Acad. Sci., 14, 273 (1952).
[14] The Principal Characteristics of the Earth's Crust Formation. Science, 119, 361 (1954).

Jeans, J. H.
[1] Problems of Cosmogony and Stellar Dynamics, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1919 (где цитируются другие статьи).
[2] On Radioactive Viscosity and Rotation of Astronomical Masses. MNRAS, 86, 328, 444 (1926).
[3] Astronomy and Cosmogony. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1928.

Jeffreys, H.
[1] The Earth. Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1924, 1929, 1952.
[2] The Figures of Rotating Planets. MNRAS, 113, 97 (1953).

Jeffreys, H., Bland, M. E. M.
[1] The Instability of a Fluid Sphere Heated Within. MNRAS, Geophys. Suppl., 6, 148 (1951).

Joukowski, N.
[1] On the Motion of a Solid Having Cavities Filled Up with a Homogeneous Liquid (на русском языке). J. Soc. Phys. Chem. St. Petersb., 17, 81 (1885). [Русск. пер.: Жуковский Н. Е. О движении тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью. Журнал Русского физ.-хим. об-ва, 1885, т. 17, отд. 1, вып. 6, с. 81–113.]

Kähler, E.
[1] Über die Existenz von Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, die sich aus gewissen Lösungen des n-Körperproblems ableiten. Math. Z., 33, 300 (1931).

Kondurar, V.
[1] Le problème du mouvement de deux ellipsoides sous l'action de l'attraction mutuelle. Astr. J., 13, 563 (1936). [Русск. пер.: Кондурарь В. Т. Проблема движения двух эллипсоидов под действием взаимного притяжения, ч. 1. Проблема двух сфероидов с совпадающими плоскостями экваториальных сечений, Астр. журн., т. XII, вып. 6, 1936; ч. 2. Проблема двух сфероидов с взаимно перпендикулярными осями вращения, Труды ГАИШ, IX, вып. 2, 1939.]

Kovalevsky, S.
[1] Zusätze und Bemerkungen zu Laplace's Untersuchung über die Gestalt der Saturnringe. A. N., III (1885).

Krat, V. A.

[1] Figures of Equilibrium of Celestial Bodies, Moscow, 1950. Статьи по двойным звездам и другие задачи. Astr. J. Moscow, (1934–48); Zf. f. Ap., 12, 192 (1936). [Русск. пер.: Крат В. А. Фигуры равновесия небесных тел // Изд. АН СССР, М.–Л., 1950.]

Krogdahl, W.

[1] Stellar Rotation and Large Scale Currents. Ap. J., 99, 191 (1944).

Lamb, H.

[1] Hydrodynamics. Dover, 1945. [Русск. пер.: Ламб Г. Гидродинамика. М.–Л.: ОГИЗ, Гостехиздат, 1947. 928 с. Репринт: Том 1, 2. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2003.]

Lapwood, E. R.

[1] Convection of a Fl uid in a Porous Medium. Proc. Cambridge Phil. Soc., 44, 508 (1948).

Lense, J.

[1] Über erne Integralgleichung in der Theorie der heterogenen Gleichgewichtsfiguren. Math. Z., 16, 296 (1923).

Liapounov, A.

[1] Sur la stabilité des figures ellipsoidales d'équilibre d'un liquide animé d'un mouvement de rotation (на русском языке), 1884; перевод в Ann. de Toulouse, Ser. 2, VI (1904). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Рассуждение на степень магистра прикладной математики, с. 5–113. (СПб., Типография Академии Наук, 1884, XV+109(3) стр.)]

[2] Sur l'équation de Clairaut et les équations plus générales de la théorie de la figure des planétes. Mém. St. Pet., VIII sér., XV, No. 10 (1904). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. Об уравнении Клеро и о более общих уравнениях теории фигуры планет, с. 147–206. (Записки Имп. Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII серия, 1904, т. XV, № 10, с. 1–66.)]

[3] Recherches dans la théorie de la figure des corps célestes. Mém. St. Pet., VIII sér., XIV, No. 7 (1903). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. Исследования по теории фигуры небесных тел, с. 114–146. (Записки Имп. Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII серия, 1903, т. XIV, № 7, с. 1–37.)]

[4] Sur un problème de Tchebycheff. Mém. St. Pet., VIII sér., XVII, No. 3 (1905). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. Об одной задаче Чебышева, с. 207–236. (Записки Имп. Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII серия, 1905, т. XVII, № 3, с. 1–32.)]

[5] Sur les figures d'équilibre peu différentes des ellipsoides d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation. Mém. prés. Acad. Sci. St. Pet., Part I (1906), Part II (1909), Part III (1912), Part IV (1914). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. О фигурах равновесия, мало отличающихся от элипсоидов, вращающейся однородной массы жидкости. Часть I. Общее исследование задачи, с. 7–208. (Мемуар, представленный императорской Академии Наук 21 марта 1906 г.) Часть II. Фигуры равновесия, производные от эллипсоидов Маклорена, с. 210–379 .(Мемуар, представленный императорской Академии Наук 30 сентября 1908 г.) Часть III. Фигуры равновесия, производные от эллипсоидов Якоби, с. 380–554. (Мемуар, представленный императорской Академии Наук 4 октября 1911 г.) Часть IV. Новые формулы для определения фигур равновесия, с. 556–644. (Мемуар, представленный императорской Академии Наук 16 апреля 1913 г.)]

[6] Problème de minimum dans une question de stabilité des figures d'équilibre dérivées des ellipsoides. Bull. Acad. Sci. St. Pet., VIII sér., XXII, No. 5 (1908). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. Задача минимума в одном вопросе об устойчивости фигур равновесия вращающейся жидкости, с. 237–360. (Записки Имп. Академии Наук по физико-математическому отделению, VIII серия, 1908, т. XXII, № 5, с. 1–140.)]

[7] Sur une classe des figures d'équilibre d'un liquide en rotation. Ann. Ecole Normale, 3 sér., XXVI (1909). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. Об одном семействе фигур равновесия вращающейся жидкости, с. 387–394. Собрание сочинений. Т. 5. М.: Изд-во Акад. наук СССР, 1965, с. 387–394.]

[8] Sur les questions qui appartiennent aux surfaces des figures d'équilibre des ellipsoides. Bull. Acad. Sci. St. Pet., (1916). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. Об уравнениях поверхностей фигур равновесия вращающейся жидкости, ответвляющихся от эллипсоидов, с. 395–418. (Известия Академии Наук, VI серия, 1916, т. X, № 3, с. 139–168.)]

[9] Sur certaines séries de figures d'équilibre d'un liquide hétérogène en rotation. Acad. Sci. URSS, Part I (1925), Part II (1927). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. О некоторых рядах фигур равновесия неоднородной вращающейся жидкости. Посмертное издание в: Собрание сочинений, Том 5, М.: Изд-во АН СССР, 1965, с. 7–378.]

[10] Sur la figure des corps célestes (лекция от 1918 г.). Bull. Acad. Sci. URSS, VII sér., Phys. math. cl. No. 1 (1930). [Русск. пер.: Ляпунов А. М. О форме небесных тел, с. 361–374. (Известия Академии Наук по физико-математическому отделению, 1930, № 1, с. 25–41.)]

Lichtenstein, L.

[1] Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeiten, Leipzig, 1933. [Пер. с нем. Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. 252 стр.]

[2] Papers in Math. Z. (1918–1933).

[3] Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierender Flüssigkeit, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen. Abh. Nichthomogene Flüssigkeit. Figur der Erde. Math. Z., 36, 481 (1933).

[4] Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren homogener Flüssigkeiten (статья опубликована посмертно). Math. Z., 39, 639 (1935).

[5] Zur mathematischen Theorie der Gestalt des Weltmeeres. Prace mat. fiz. 43, 1 (1936).

[6] Vorlesungen über einige Klassen nichtlinearen Integralgleichungen und Integro-Differentialgleichungen. Springer, Berlin, 1931.

Liouville, J.

[1] Sur diverses questions d'Analyse et de Physique math'ématique. J. math., X, 222 (1845).

[2] Lettres sur diverses questions d'Analyse et de Physique mathématique concernant l'ellipsoide. J. math., XI, 217, 261 (1846).

[3] Formules générales relatives à la question de la stabilité de l'équilibre d'une masse liquide homogène douée d'un mouvement de rotation autour d'un axe. J. de Liouville, 20, (1855).

Love, A. E. H.

[1] Some Problems of Geodynamics. Cambridge, Univ. Press, Cambridge, 1911, 1924.

Lvoff, N.

[1] On the Figure and Internal Constitution of the Four Great Planets. Astr. J. Moscow, Part I, 9, (1932), Part II, 10, (141) 1933. [Русск. пер.: Львов Н. Н. О форме и внутреннем сстроении четырех больших планет. Астрономический журнал. М: Изд. акад. наук СССР, Часть I 9, 1932, Часть II, 10 (141)1933.]

Lyttleton, R. A.
[1] The Stability of Rotating Liquid Masses. Cambridge Univ. Press, 1953. [Русск. пер.: Литтлтон Р. А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. Перевод с английского и редакция Б. П. Кондратьева. Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2011. 240 с.]

Markovsky, D.
[1] Approximate Ellipsoidal Figures of Equilibrium of a Rotating Fluid and Their Application to Gravimetry. Astr. J. Moscow, 10, 51, 202 (1933).

Maruhn, K.
[1] Ein Beitrag zur mathematischen Theorie der Gestalt der Himmelskörper. Math. Z., 33, 300 (1931).
[2] Über den von Laplace postulierten Urkörper. Math. Z., 37, 463 (1933).

Matschinski, M.
[1] Plissement d'un continent de forme approximativement triangulaire. C. R. Paris, 234, 2473–76 (1952).

Mazurkiewicz, W.
[1] Zur Theorie der Gleichgewichtsfiguren rotierender, homogener Flüssigkeiten. Math. Z., 25, 749 (1926).

Milankovitch, M.
[1] Kanon der Erdbestrahlung und seine Anwendung auf das Eiszeitenproblem. R. Serb. Acad. Sci., Spec. Edition 132 (1941).

Miles, B. and Ramsey, W. H.
[1] MNRAS, 112, 234 (1952).

Milne, E. A.
[1] Thermodynamik der Sterne. Hdb. Astrophysik, Berlin, III, I (1930).

Mineo, C.
[1] Distribuzioni della massa nell'interno d'un pianeta compatibili con una assegnata azione esterna. Boll. Univ. Mat. Ital. Bologna, VIII, 2, 1 (1929).
[2] On the Expansion of the Earth's Gravity in Powers of the Square of the Sine of the Latitude. Quart. J. Math. Oxford I, 2, 116 (1930).
[3] Potenziale newtoniano all'esterno d'un astro e stratificazioni d'equilibrio. Atti Soc. Ital. Sci., II, 179 (1933).
[4] Forma d'un pianeta dedotta dai valori della gravita in superficie. Rend. Accad. Ital. Rend. fis. mat., Ser. VII, 4, 143 (1943).

[5] Stratificazione e linee di forza degli astri fluidi rotanti in equilibrio relativo. Atti R. Accad. Palermo, Ser. IV, 5, 1 (1946).

[6] Teoria idrostatica delle configurazioni d'equilibrio dei pianeti fluidi rotanti e teoria di Stokes nel caso particolare della Terra. Atti Accad Lincei, Rend. fis. mat. e nat., Ser. VIII, 12, 635 (1952) и другие статьи.

Moulton, E. J.

[1] On the Figures of Equilibrium of a Rotating Compressible Fluid Mass; Certain Negative Results. Am. M. S. Trans., 17, 100 (1916).

Nadile, A.

[1] Configrazioni ellissoidali di equilibrio di una massa liquida omogenea attratta da un anello circolare concentrico. Atti Sem. Mat. Fis. Modena, 5, 178 (1951).

Neronoff, N.

[1] Sur une méthode de determination des figures d'équilibre relatif, voisines des ellipsoides, d'une masse liquide homogène en rotation. Ann. Mat. pura appl. Bologna, [4] 15, 175 (1936).

Nicliborc, W.

[1] Ein Satz über die Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren. Math. Z., 30, 787 (1929).

[2] Ein Satz über die Winkelgeschwindigkeit der Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeit. Math. Z., 31, 366 (1930).

[3] Über die Abplattung der homogenen Gleichgewichtsfiguren rotierender, gravitierender Flüssigkeiten. Math. Z., 34, 74 (1932).

Openheim, S.

[1] Die Theorie der Gleichgewichtsfiguren der Himmelskörper. Enc. d. Math. Wiss., VI, 2, 21.

Orlov, M.

[1] Neue Berechnung der Figuren relativen Gleichgewichts einer homogenen Flüssigkeit. Kiew Mem. Acad. Sci., 92, 65 (1928) и другие статьи.

Pekeris, C. L.

[1] Thermal Convection in the Interior of the Earth. MNRAS, Geophys. Suppl., 3, 343 (1936).

Picart, L.

[1] Sur la rotation d'un corps variable. C. R. Paris, 122, 1264 (1896) и другие статьи.

Pizzetti, P.

[1] Principi della teoria meccanica della figure dei pianeti. Pisa, 1913. [Русск. пер.: Пицетти П. Основы механической теории фигуры планет. М.–Ленинград: Государственное технико-теоретическое изд-во, 1933. 170 с.]

Poincaré, H.

[1] Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta Math., VII, 259 (1885); C. R. Paris, 100, 346 (1885); *ibid.*, 101, 1068 (1885) и другие статьи.

[2] Leçons sur les figures d'équilibre d'une masse fluide. Naud, Paris, 1902. [Русск. пер.: Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. Ижевск: НИЦ «РХД», 2000. 208 с.]

[3] Leçons sur les hypothèses cosmogoniques. Hermann, Paris, 1911.

Prasad, C.

[1] On a General Theorem on Rotating Masses by Jeans. Proc. Banaras Math. Soc, IX (2) (1947).

[2] On the Stability of Maclaurin Spheroids Rotating with Constant Angular Velocity. Quart. J. Math. Oxford, (2) I, 117 (1950).

Prey, A.

[1] Über die Möglichkeit der Gebirgsbildung durch den hydrostatischen Druck in der Erdkruste. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien. Math. Nat. Kl., IIa, 151. (1942).

[2] Über die Theorie der Landbrücken und die Viskosität der Erde. Sitz. Ber. Akad. Wiss. Wien. Math. Nat. Kl., IIa, 593 (1947).

Ramsey, W. H.

[1] On the Constitution of the Major Planets. MNRAS, 111, 427 (1951).

Randers, G.

[1] Large-scale Motion in Stars. Ap. J., 94, 109 (1941).

Rein, N.

[1] On the Condensation in Dust Nebulae. Astr. J. Moscow, 10 (1933); *ibid.*, 11, 330 (1934); *ibid.*, 13, 122, 414 (1936).

Riabouchinsky, D.

[1] Quelques considérations sur l'interprétation hydrodynamique de la périodicité des taches solaires. C. R. Paris, 195, 574 (1932).

Riemann, B.

[1] Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines flüssigen gleichartigen Ellipsoides. Göttingen Abh., IX, 3, (1861); Ges. Werke, 182 (1892). [Русск. пер.: [Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 339–366; а также см.: Риман Б. О движении жидкого однородного эллипсоида // Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев (ред.). М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. С. 74–107.]

Russell, H. N.

[1] On the Advance of Periastron in Eclipsing Binaries. MNRAS, 88, 641 (1928).

Shajn, G. and Struve, O.

[1] On the Rotation of the Stars. MNRAS, 89, 222 (1929).

de Sitter, W.

[1] B. A. N., 2, 97 (1924).

Stekloff, W.

[1] Sur le problème du mouvement d'un ellipsoide fluide homogène dont toutes les parties s'attirent suivant la loi de Newton. C. R. Paris, 141 (1905); *ibid.*, 142 (1906). [Русск. пер.: Стеклов В. А. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского. Ижевск: НИЦ «РХД», 2011. 492 с. К задаче о движении жидкого однородного эллипсоида, все части которого притягиваются друг к другу по закону Ньютона. С. 153–155.]

[2] Problème du mouvement d'une masse fluide incompressible de forme ellipsoidale. Ann. École Norm., 26, 225 (1909). [Русск. пер.: Стеклов В. А. Работы по механике 1902–1909 гг.: Переводы с французского. Ижевск: НИЦ «РХД», 2011. 492 с. Задача о движении несжимаемой жидкой массы, имеющей форму эллипсоида, частицы которой притягиваются друг к другу по закону Ньютона. С. 223–282.]

Strachovitch, K. I.

[1] On the Hydrodynamics of Rotating Fluid Masses. Sci. Pap. Univ. Leningrad, Math. Ser., 12, 128 (1937).

Struve, O.

[1] Stellar Evolution. Princeton Univ. Press, 1950.

Taylor, F. B.

[1] Bearing of the Tertiary Mountain Belt in the Origin of the Earth's Plan. Geol. Soc. Am. Bull., (2) 21, 179 (1910).

Tisserand, F.
[1] Traité de Méchanique céleste, Vol. II, Paris, 1891.

Thomson, W. and Tait P. G.
[1] Treatise on Natural Philosophy. Cambridge Univ. Press, 1883. [Русск. пер.: Томсон У. (лорд Кельвин), Тэт П. Г. Трактат по натуральной философии: В 2-х тт. М.–Ижевск: НИЦ «РХД», 2010. 572 с.; 592 с.]

Tuominen, J.
[1] Die systematische Strombewegung der Sonnenflecke in heliographischer Breite. Z. f. Ap., 21, 96 (1941).

Urey, H. C.
[1] The Planets. Their Origin and Development. Yale Univ. Press, 1952.
[2] Comments on Planetary Convection as Applied to the Earth. Phil. Mag. 44, 227 (1953).

Vening-Meinesz, F. A.
[1] A Remarkable Feature of the Earth's Topography, Origin of Continents and Ocean. Proc. K. Ned. Akad. Wet., B.54, 212 (1951).
[2] Convection Currents in the Earth and the Origin of the Continents. Proc. K. Ned. Akad. Wet., B.55, 527 (1952).

Véronnet, A.
[1] Rotation de l'éllipsoide hétérogène et figure exacte de la Terre. J. Math., 314 (1912).
[2] Figures d'équilibre et Cosmogonie. Mémorial Sci. Math., 13 (1926).
[3] Constitution et evolution de l'Univers. Paris, 1927.

Volterra, V.
[1] Sur la théorie des variations des latitudes. Acta Math., 22, 201 (1899).
[2] Sur la stratification d'une masse fluide en rotation. Acta Math., 27, 105 (1903).

Walter, K.
[1] Die Bewegungsverhältnisse in sehr engen Doppelsternsysteme. Königsberg Veröff., 3, (1933).

Wasiutynski, J.
[1] Studies in Hydrodynamics and Structure of Stars and Planets. Astrophysica Norv., 4, (1946).

Wavre, R.

[1] Figures planétaires et Géodésie. Paris, 1932, и другие статьи.

[2] Sur une méthode de M. Volterra et un théorème de Dive relatif aux masses fluides. C. R. Paris, 207, 462 (1938).

Wegener, A.

[1] Die Entstehung der Kontinente und Ozeane, 1929.

Zamorev, A.

[1] On the Determination of the Shape of a Planet from the Motion of Satellites. Astr. J. Moscow, 14, 364 (1937). [Заморев А. А. Об определении формы планет по движению спутников // Астрон. журн. 1937. Т. XIV, № 4. С. 364–369.]

v. Zeipel, H.

[1] The Radiative Equilibrium of a Rotating System of Gaseous Masses. MNRAS, 84, 665 (1924).

[2] The Radiative Equilibrium of a Slightly Oblate Rotating Star. MNRAS, 84, 684 (1924).

Приложение А

Вращение неоднородного эллипсоида и точная форма Земли[1]

А. Вероне

А.1. Общие уравнения и постоянное равновесие

1. *Два метода.* Пусть жидкая неоднородная масса состоит из эллипсоидальных слоев с переменной плотностью ρ. Пользуясь *методом, принадлежащим г-ну Ами* [Hamy][2], мы можем считать, что эта масса состоит *уже не из накладывающихся друг на друга эллипсоидальных слоев, а из настоящих эллипсоидов, проникающих друг в друга.* Придадим эллипсоиду, ограниченному поверхностью S и имеющему оси a, b, c, плотность, равную разности плотностей между двумя соседними поверхностями. Однако вместо конечных разностей, возникающих в методе г-на Ами, мы возьмем дифференциалы, а вместо сумм — интегралы, чтобы можно было рассматривать произвольное и непрерывное изменение плотности. Мы будем представлять такой дифференциал в виде $-\rho' da$, так как у нас $\rho' < 0$, а плотности должны быть больше нуля. Мы будем оценивать их на оси вращения a.

Пусть точка $\mathrm{N}(x_n, y_n, z_n)$ лежит на эллипсоиде S_n с осями a_n, b_n, c_n. Используя формулы Якоби, получаем, что компоненты силы притяжения тех эллипсоидов, для которых эта точка является внешней, имеют вид

$$\mathrm{X}_e = -2\pi f x_n \int\limits_0^{a_n} -\rho' da \int\limits_{\mu}^{\infty} \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s},$$

где

$$\Delta_s = \frac{\sqrt{(a^2+s)(b^2+s)(c^2+s)}}{abc},$$

[1] В данном приложении приводится перевод 1 и 2 частей статьи Veronnet A. Rotation de l'ellipsoïde hétérogène et figure exacte de la Terre // Journ. de Mathematiques pures et appliquees, 1912, vol. 8, ser. 6, pp. 331–463. Перевод Шуликовская В. В.

[2] Étude de la figure des corps célestes, 1887 г., с. 3.

а μ — положительный корень уравнения

$$\frac{x_n^2}{a^2+\mu}+\frac{y_n^2}{b^2+\mu}+\frac{z_n^2}{c^2+\mu}=1. \tag{A.1.1}$$

Для эллипсоидов, содержащих точку N внутри себя, начиная с эллипсоида $S_1(\rho_1, a_1, b_1, c_1)$, получаем

$$\mathrm{X}_i=-2\pi f x_n \rho_1 \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a_1^2+s)\Delta_s}-2\pi f x_n \int\limits_{a_n}^1 -\rho' da \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}=$$

$$=-2\pi f x_n \int\limits_{a_n}^1 (\rho_1-\rho' da) \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s},^3$$

$$\mathrm{X}=\mathrm{X}_e+\mathrm{X}_i=-2\pi f x_n \int\limits_0^{a_n} -\rho' da \int\limits_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}- \tag{A.1.2}$$

$$-2\pi f x_n \int\limits_{a_n}^1 (\rho_1-\rho' da) \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}.$$

Заменяя x_n, a_n, a на y_n, b_n, b и на z_n, c_n, c, мы найдем компоненты Y и Z.

Интегралы $\int_\mu^\infty$ и $\int_0^\infty$ зависят от a, b, c на слое S, которому соответствуют ρ' и ρ или ρ_1. Интегралы $\int_\mu^\infty$, кроме того, зависят от x_n, y_n, z_n, это видно из $(A.1.1)$.

Обозначая через ω скорость вращения точки N, получаем, что компоненты силы, действующей на точку N, равны

$$\mathrm{X}, \quad \mathrm{Y}+\omega^2 y_n, \quad \mathrm{Z}+\omega^2 z_n,$$

причем координаты x_n, y_n, z_n точки N удовлетворяют соотношению

$$\frac{x_n^2}{a_n^2}+\frac{y_n^2}{b_n^2}+\frac{z_n^2}{c_n^2}=1. \tag{A.1.3}$$

[3]Это последнее обозначение, сводящее X_i только к одному слагаемому, не совсем правильное, но я счел его очень удобным для дальнейших вычислений, так как оно позволяет свести фундаментальную формулу $(A.1.5)$ к двум слагаемым, как в формуле $(A.1.5')$, а это поможет нам проводить аналогии и с большей легкостью переходить от одной формулы к другой. Достаточно вспомнить, что член, содержащий ρ_1, представляет собой константу, когда мы задаем значение подынтегральной функции на поверхности.

Для равновесия требуется, чтобы сила была нормальна к поверхности, откуда возникают условия

$$
\begin{gathered}
\mathrm{X}\frac{a_n^2}{x_n} = (\mathrm{Y}+\omega^2 y_n)\frac{b_n^2}{y_n} = (\mathrm{Z}+\omega^2 z_n)\frac{c_n^2}{z_n}, \\
\omega^2 = -\frac{\mathrm{Y}}{y_n} + \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\mathrm{X}}{x_n} = -\frac{\mathrm{Z}}{z_n} + \frac{a_n^2}{c_n^2}\frac{\mathrm{X}}{x_n}.
\end{gathered} \tag{A.1.4}
$$

Эти два условия сразу дают нам

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2}\int_0^{a_n} -\rho'\,da \int_\mu^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s} + \\
+ \frac{1}{b_n^2}\int_{a_n}^{1} (\rho_1 - \rho'\,da) \int_0^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s},
\end{aligned} \tag{A.1.5}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{c_n^2}\int_0^{a_n} -\rho'\,da \int_\mu^\infty \left(\frac{c_n^2}{c^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s} + \\
+ \frac{1}{c_n^2}\int_{a_n}^{1} (\rho_1 - \rho'\,da) \int_0^\infty \left(\frac{c_n^2}{c^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s}.
\end{aligned} \tag{A.1.6}
$$

Два полученных нами значения ω должны совпадать. У нас есть одно очевидное решение: $b = c$, $b_n = c_n$: эллипсоид вращения. В остальных случаях решение неизвестно.

Классический метод состоит в том, чтобы непосредственно рассматривать неоднородный эллипсоид как состоящий из эллипсоидальных слоев с переменной плотностью и переменным эксцентриситетом. Дифференцируя формулы, справедливые для однородного эллипсоида, находим, что для силы притяжения элементарного слоя

$$
d\mathrm{X}_e = -2\pi f x_n \rho\, d\int_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}, \qquad d\mathrm{X}_i = -2\pi f x_n \rho\, d\int_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}.
$$

Следовательно, для силы притяжения неоднородного эллипсоида, а значит, и для ω^2, справедливы равенства

$$\mathrm{X} = \mathrm{X}_e + \mathrm{X}_i = -2\pi f x_n \left[\int\limits_0^{a_n} \rho\, d \int\limits_\mu^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} + \int\limits_{a_n}^1 \rho\, d \int\limits_0^\infty \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}\right],$$

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2} \int\limits_0^{a_n} \rho\, d \int\limits_\mu^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right) \frac{ds}{\Delta_s} + \qquad (A.1.5')$$

$$+ \frac{1}{b_n^2} \int\limits_{a_n}^1 \rho\, d \int\limits_0^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right) \frac{ds}{\Delta_s}.$$

Последней формуле можно придать вид

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = \int\limits_0^{a_n} \rho\, d\mathrm{A}_\mu + \int\limits_{a_n}^1 \rho\, d\mathrm{A}_0, \quad \mathrm{A}_\mu = \int\limits_\mu^\infty \left(\frac{b_n^2}{b^2+s} - \frac{a_n^2}{a^2+s}\right) \frac{ds}{\Delta_s}.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = (\rho \mathrm{A}_\mu)_0^{a_n} + (\rho \mathrm{A}_0)_{a_n}^1 - \int\limits_0^{a_n} \mathrm{A}_\mu\, d\rho - \int\limits_{a_n}^1 \mathrm{A}_0\, d\rho.$$

Но, если положить $a = 0$, у нас будет $b = 0$ и $c = 0$, откуда $\frac{1}{\Delta_s} = 0$ и $\mathrm{A}_\mu = 0$. Точно так же при $a = a_n$ находим $b = b_n$, $c = c_n$ и $\mu = 0$ в силу $(A.1.1)$ и $(A.1.3)$. Таким образом,

$$(\rho \mathrm{A}_\mu)^{a_n} = (\rho \mathrm{A}_0)^{a_n} \quad \text{и} \quad (\rho \mathrm{A}_\mu)_0^{a_n} + (\rho \mathrm{A}_0)_{a_n}^1 = (\rho \mathrm{A}_0)^1 = \rho_1 \mathrm{A}_0.$$

Наша формула принимает вид

$$\frac{\omega^2 b_n^2}{2\pi f} = -\int\limits_0^{a_n} \mathrm{A}_\mu\, d\rho - \int\limits_{a_n}^1 \mathrm{A}_0\, d\rho + \rho_1 \mathrm{A}_0 =$$

$$= \int\limits_0^{a_n} -\rho' \mathrm{A}_\mu\, da + \int\limits_{a_n}^1 (\rho_1 - \rho'\, da) \mathrm{A}_0.$$

Она в точности совпадает с формулой (A.1.5). Иначе говоря, две формулы (A.1.5) и (A.1.5$'$) идентичны. Первая лучше подходит для представления величин A_0 и A_μ под знаком суммы, без дифференцирования, чтобы сохранить простую форму записи силы притяжения однородных эллипсоидов. Поэтому, используя данные формулы с ρ', нам будет легче учитывать все результаты, полученные с этой последней точки зрения.

Теперь мы будем различать *постоянное равновесие*, когда силы трения уравнивают скорости по глубине и широте, и *переходное равновесие*, когда эти скорости еще не уравниваются (Солнце, Юпитер, Сатурн). Впрочем, последний вид равновесия будет окончательным, если трение равно нулю.

Теперь мы исследуем, как изменяется выражение величины ω^2 в зависимости широты и глубины.

2. *Изменение скорости вращения в зависимости от широты.* Формулы (A.1.5) и (A.1.6) задают нам скорость вращения на слое S_n. Достаточно будет продифференцировать их по x_n^2. Заметим, что ω^2 зависит от x_n^2 только за счет промежуточной функции μ. Получаем

$$\frac{\partial}{\partial x_n^2}\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2}\int\limits_0^{a_n} -\rho'\frac{\partial \mathrm{A}_\mu}{\partial\mu}\frac{\partial\mu}{\partial x_n^2}\,da, \tag{A.1.7}$$

$$\frac{\partial \mathrm{A}_\mu}{\partial\mu} = -\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)\frac{1}{\Delta_\mu} \quad (\Delta_\mu = \Delta_s, \quad \text{где} \quad s=\mu), \tag{A.1.8}$$

где μ определяется по формуле (A.1.1). Чтобы получить $\dfrac{\partial\mu}{\partial x_n^2}$, исключим y_n^2 из соотношений (A.1.1) и (A.1.3), сначала умножая (A.1.3) на $\dfrac{b_n^2}{b^2+\mu}$, а затем вычитая из него (A.1.1). В результате

$$\frac{x_n^2}{a_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right) + \frac{z_n^2}{c_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{c_n^2}{c^2+\mu}\right) = \frac{b_n^2}{b^2+\mu} - 1.$$

Дифференцируя по x_n^2, находим

$$\mathrm{B}\frac{\partial\mu}{\partial x_n^2} = -\frac{1}{a_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right), \tag{A.1.9}$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \mathrm{B} &= \frac{x_n^2}{(a^2+\mu)^2} + \frac{z_n^2}{(c^2+\mu)^2} - \frac{b_n^2}{(b^2+\mu)^2}\left(\frac{x_n^2}{a_n^2} + \frac{z_n^2}{c_n^2} - 1\right) = \\ &= \frac{x_n^2}{(a^2+\mu)^2} + \frac{y_n^2}{(b^2+\mu)^2} + \frac{z_n^2}{(c^2+\mu)^2}. \end{aligned} \tag{A.1.10}$$

Подставляя ($A.1.8$) и ($A.1.9$) в соотношение ($A.1.7$), получаем

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f}{a_n^2 b_n^2}\int_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)^2 \frac{-\rho'\,da}{\mathrm{B}\Delta_\mu}. \tag{A.1.11}$$

Точно так же второе условие ($A.1.6$) дает нам

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f}{a_n^2 c_n^2}\int_0^{a_n}\left(\frac{c_n^2}{c^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)^2 \frac{-\rho'\,da}{\mathrm{B}\Delta_\mu}. \tag{A.1.11$'$}$$

Для того чтобы скорость вращения была одной и той же на произвольной поверхности S_n, то есть для того чтобы эллипсоидальная фигура равновесия была совместима со скоростью равномерного вращения по широте, необходимо одно из двух:

1) $\rho' = 0$, плотность постоянна, эллипсоид однородный;

2) либо $\dfrac{a_n^2}{a^2+\mu} = \dfrac{b_n^2}{b^2+\mu} = \dfrac{c_n^2}{c^2+\mu}$, каковы бы ни были a, b, c; иначе говоря, эллипсоиды гомофокальные.

В этом последнем случае у нас было бы

$$\lambda^2 a^2 = b^2 - a^2 = h^2, \quad \lambda'^2 a^2 = c^2 - a^2 = k^2,$$

тогда λ и λ' в центре при $a = 0$, $b = h$, $c = k$ обращались бы в бесконечность. Эксцентриситет был бы равен 1, и центральный эллипсоид превратился бы в сплющенный диск.

3. *Изменение скорости вращения в зависимости от глубины.* Для простоты мы исследуем, как изменяется скорость вращения вдоль полярной оси a, вдоль которой также оценивают и плотности[4]. (См. замечание в конце.)

[4]Вдоль полярной оси $y_n = z_n = 0$, и формулы ($A.1.1$) и ($A.1.3$) принимают вид

$$\frac{x_n^2}{a^2+\mu} = 1; \quad (A.1.1') \qquad \frac{x_n^2}{a_n^2} = 1, \quad a^2+\mu = a_n^2 = x_n^2. \qquad (A.1.3')$$

Прежде всего, преобразуем формулу (A.1.5) так, чтобы у нее был только один предел, содержащий a_n. Получаем

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{2\pi f} = \frac{1}{b_n^2}\int\limits_0^\infty(\rho_1-\rho'\,da)\int\limits_0^\infty\left(\frac{b_n^2}{b^2+s}-\frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s} - \\ -\frac{1}{b_n^2}\int\limits_0^{a_n}-\rho'\,da\int\limits_0^\mu\left(\frac{b_n^2}{b^2+s}-\frac{a_n^2}{a^2+s}\right)\frac{ds}{\Delta_s}.\end{aligned} \tag{A.1.12}$$

Продифференцируем данное выражение по a:

$$\frac{1}{2\pi f}\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} = \frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_n} - \mathrm{C}\frac{d}{da_n}\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}\right), \tag{A.1.13}$$

где

$$\mathrm{D} = \int\limits_0^{a_n}-\rho'\,da\int\limits_0^\mu\frac{ds}{(b^2+s)\Delta_s},\quad \mathrm{E} = \int\limits_0^{a_n}-\rho'\,da\int\limits_0^\mu\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s},$$

и, если восстановить первоначальный порядок интегралов,

$$\mathrm{C} = \int\limits_0^{a_n}-\rho'\,da\int\limits_\mu^\infty\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} + \int\limits_{a_n}^1(\rho_1-\rho'\,da)\int\limits_0^\infty\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} = -\frac{1}{2\pi f}\frac{\mathrm{X}}{a_n}.$$

Итак, если $\mathrm{C}>0$ при $\rho'<0$, тогда

$$\frac{a_n^2}{b_n^2} = \frac{1}{1+\lambda^2},\qquad -\mathrm{C}\frac{d}{da_n}\left(\frac{a_n^2}{b_n^2}\right) = \frac{\mathrm{C}}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

В выражении E величина ρ' зависит только от переменной a, интеграл $\int_0^\mu$ — от a и μ, которое, будучи определенным по формуле (A.1.1), зависит от a и a_n, причем в силу (A.1.3) от a_n через промежуточную величину x_n. Поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_n} = -\rho'\left[\int\limits_0^\mu\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}\right]^{a_n} + \\ + \int\limits_0^{a_n}-\rho'\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\int\limits_0^\mu\frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s}\right]\frac{\partial\mu}{\partial x_n^2}\frac{\partial x_n^2}{\partial a_n}\,da.\end{aligned}$$

Проинтегрировав выражение, стоящее в первых скобках, мы получим функцию от μ и от a, причем необходимо положить $a = a_n$. Но если в соотношении $(A.1.1)$ положить $a = a_n$, то в силу $(A.1.3)$ $\mu = 0$. Иначе говоря, этот член обращается в нуль.

Во втором слагаемом мы уже получили

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\int\limits_0^\mu \frac{ds}{(a^2+s)\Delta_s} = \frac{1}{(a^2+\mu)\Delta_\mu}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial x_n^2} = \frac{-1}{\mathrm{B}a_n^2}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right).$$

Кроме того, в (A.1.3′)

$$\frac{\partial x_n^2}{\partial a_n} = \frac{\partial a_n^2}{\partial a_n} = 2a_n;$$

откуда окончательно

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{a_n^2}\int\limits_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)\frac{-\rho'\,da}{(a^2+\mu)\mathrm{B}\Delta_\mu}.$$

Точно так же можно найти

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{a_n^2}\int\limits_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)\frac{-\rho'\,da}{(b^2+\mu)\mathrm{B}\Delta_\mu};$$

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{a_n^2 b_n^2}\int\limits_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)^2\frac{-\rho'\,da}{\mathrm{B}\Delta_\mu}.$$

Теперь, с учетом $(A.1.11)$,

$$\frac{\partial \mathrm{D}}{\partial a_n} - \frac{a_n^2}{b_n^2}\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial a_n} = -\frac{2a_n}{2\pi f}\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2}.$$

В результате, наконец, приходим к *фундаментальной формуле*

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} + 2a_n\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = \frac{2\pi f \mathrm{C}}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da_n}. \qquad (A.1.14)$$

Формула $(A.1.6)$ могла бы дать нам аналогичное выражение, в котором вместо λ стоит λ', задаваемое по формуле

$$c^2 = a^2(1+\lambda'^2).$$

4. *Выводы.* Рассмотрим случай, когда реализуются два условия постоянного равновесия, и случаи, когда реализуется только одно условие.

1. Для постоянного равновесия необходимо, чтобы $\dfrac{\partial\omega^2}{\partial a_n} = 0$ и $\dfrac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = 0$. Как мы уже видели, последнее условие реализуется только в том случае, когда поверхности уровня представляют собой гомофокальные эллипсоиды. С учетом $(A.1.14)$ из двух этих условий вместе взятых следует, что $\dfrac{d\lambda^2}{da_n} = 0$, то есть что данные поверхности — гомотетичные эллипсоиды.

Эти два требования несовместны. В неоднородной жидкости в случае эллипсоидальных поверхностей постоянное равновесие невозможно. Так утверждает теорема г-на Ами, обобщенная на случай, когда изменение плотности происходит непрерывно.

Вольтерра тоже удалось непосредственно доказать, что гомотетичные эллипсоиды не могут служить поверхностями уровня[5].

2. Как показывает формула $(A.1.11)$, если отбросить гомофокальные эллипсоиды, то при $\rho' < 0$ у нас $\dfrac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} > 0$. Скорость вращения на поверхности S_n должна возрастать вместе с x_n от экватора к полюсу, чтобы поверхности уровня были эллипсоидальными.

Таким образом, если на поверхности S достигается постоянное равновесие, то скорость вращения на экваторе, будучи равной скорости вращения на полюсе, оказывается немного больше, чем та скорость, которая возникала бы у эллипсоидальной фигуры. Поверхность вытягивается в области экватора. В результате такого растяжения уменьшается значение X компоненты силы притяжения на полюсе. Следовательно, поверхность будет вытягиваться одновременно на полюсе и экваторе и сжиматься в промежутке между ними. Именно это доказал г-н Калландро (Callandreau), когда рассматривал эллипсоид вращения с точностью до λ^4.[6]

3. Предположим, что $\dfrac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = 0$; тогда

$$\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} = \frac{2\pi f C}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da_n}.$$

---

[5] Acta mathematica, т. VII, 1903 г., с. 105–124. Г-н Пуанкаре еще ранее доказал, что это невозможно в случае разрывных слоев (Journal de Liouville, вып. 4, т. 6, 1890 г., с. 69). Вольтерра распространил его доказательство на случай непрерывного изменения плотности, заметив заодно, что доказательства, выполненные в дискретных случаях, не всегда можно за счет предельного перехода применить к случаям непрерывного изменения.

[6] Mémoire sur la théorie de la figure des planètes, 1889 г., с. 51.

Понятно, что при прочих равных условиях $\frac{d\lambda^2}{da_n}$, в сущности, пропорционально $\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n}$. Быстрота изменения эксцентриситета на глубине растет вместе с быстротой изменения скорости вращения. В следующей главе мы убедимся в справедливости этого правила на трех примерах: у гомофокальных эллипсоидов λ возрастает от λ_1 до ∞, изменение скорости максимально; у гомотетичных эллипсоидов λ — константа, скорость изменяется не так сильно; наконец, при постоянной скорости λ убывает от λ_1 до λ_0. Если $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2}$ не равно нулю или пренебрежимо мало, то эти выводы применимы к деформированным эллипсоидам.

4. Наконец, предположим, что $\frac{\partial\omega^2}{\partial a_n} = 0$. Заменяя производную $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n}$ на ее значение, взятое из формулы (A.1.14), получаем

$$\frac{2\pi f \mathrm{C}}{(1+\lambda^2)^2}\frac{d\lambda^2}{da_n} = \frac{2a_n}{a_n^2 b_n^2}\int\limits_0^{a_n}\left(\frac{b_n^2}{b^2+\mu} - \frac{a_n^2}{a^2+\mu}\right)^2 \frac{-\rho'\,da}{\mathrm{B}\Delta_\mu}. \qquad (A.1.15)$$

Однако правая часть этого выражения всегда больше нуля, так как $\rho' < 0$, следовательно, $\frac{d\lambda^2}{da_n} > 0$. Если предположить, что $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} \neq 0$, так, чтобы получить строго эллипсоидальные поверхности уровня, то их эксцентриситет будет расти от центра к поверхности. Теорема Клеро (Clairaut) служит частным случаем этого утверждения.

Если $\frac{\partial\omega^2}{\partial x_n^2} = 0$, то эллипсоидальные поверхности деформируются, но сделанные выше выводы остаются в силе для соответствующего эксцентриситета.

В центре $\frac{1}{\mathrm{B}} = a_n^2$, $\Delta_\mu = 1$, правая часть стремится к нулю, и мы получаем $\frac{d\lambda^2}{da_n} = 0$. Эксцентриситет достигает минимума в центре.

Теперь можно сформулировать общую теорему.

У неоднородной жидкой массы постоянное равновесие в случае эллипсоидальных поверхностей невозможно. Когда оно достигается, поверхности уровня принимают форму эллипсоидов, сжатых между полюсом и экватором, причем их эксцентриситет возрастает от центра к поверхности, с минимумом в центре.

А.2. Эллипсоиды вращения. Пределы скорости и эксцентриситета

1. *Формулы.* Общие уравнения из предыдущей главы были установлены для двух- или трехосных эллипсоидов. Для эллипсоидов вращения можно провести интегрирование, и, с учетом известных выражений для притяжения однородных эллипсоидов, формула (A.1.2) принимает вид[7]

$$\frac{\mathrm{X}}{x} = -4\pi f \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \operatorname{arctg} l)\,da - \qquad (A.2.16)$$

$$- 4\pi f \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arctg}\lambda);$$

$$\frac{\mathrm{Y}}{y} = -2\pi f \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1+l^2}\right) da - \qquad (A.2.17)$$

$$- 2\pi f \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right),$$

где

$$\lambda^2 = \frac{b^2 - a^2}{a^2}, \quad l^2 = \frac{b^2-a^2}{a^2+\mu} = \lambda^2\frac{a^2}{a^2+\mu}, \quad \frac{x^2}{a^2+\mu} + \frac{y^2+z^2}{b^2+\mu} = 1,$$

после чего

$$\omega^2 = -\frac{\mathrm{Y}}{y} + \frac{a^2}{b^2}\frac{\mathrm{X}}{x} = -\frac{\mathrm{Y}}{y} + \frac{1}{1+\lambda^2}\frac{\mathrm{X}}{x}$$

дает нам

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2}\right) da +$$

$$+ \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2}\right). \qquad (A.2.18)$$

[7]Начиная с этого момента, мы будем обозначать через r полярный радиус рассматриваемого слоя, а через индекс r — соответствующие элементы.

В дальнейшем мы будем предполагать, что скорость изменяется в зависимости от широты так, чтобы поверхности были строго эллипсоидальными. Для простоты, а также для того чтобы сделать результаты сравнимыми, будем оценивать значение ω вдоль полярной оси. Тогда

$$a^2 + \mu = a_n^2 = r^2.$$

В результате

$$l^2 = \lambda^2 \frac{a^2}{a^2 + \mu} = \frac{a^2}{r^2}\lambda^2 \quad \text{и} \quad \frac{dl}{dr} = -\frac{a}{r^2}\lambda = -\frac{l}{r}.$$

В центре $l = 0$; на слое r, соответственно, $l = \lambda_r$. В общем случае будет $l < \lambda_r$ и только для гомофокальных слоев $l = \lambda_r$.

Поскольку закон изменения плотностей в массе, по предположению, считается известным, мы будем изучать, какой вид принимают ω и λ в различных основных случаях: гомотетичных слоев, гомофокальных поверхностей, равномерной скорости.

2. *Отношение между центробежной силой и компонентой притяжения* в некоторой точке на произвольной поверхности S_r имеет вид $\varphi = \dfrac{\omega^2 y}{\mathrm{Y}}$. Оно равно отношению правых частей формул (A.2.18) и (A.2.17).

Подынтегральные выражения отличаются только величиной, стоящей в скобках. Однако можно заметить, что при $\lambda_r = \infty$,

$$u = \frac{3 + \lambda_r^2}{1 + \lambda_r^2}\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1 + l^2} - \frac{2l}{1 + \lambda_r^2} = \operatorname{arctg} l - \frac{l}{1 + l^2} = u_\infty,$$

и

$$\frac{du}{d\lambda_r} = 4\lambda_r \frac{l - \operatorname{arctg} l}{(1 + \lambda_r^2)^2}.$$

Эта величина всегда больше нуля, то есть u всегда изменяется в том же направлении, что и λ_r. Итак, $u < u_\infty$. То же самое верно и для аналогичного выражения с λ. Иначе говоря, подынтегральные выражения в формуле (A.2.18) всегда меньше, чем элементы интегрирования в формуле (A.2.17). У нас всегда $\varphi < 1$. Отсюда следует теорема.

Притяжение всегда превосходит центробежную силу как внутри, так и на поверхности неоднородной жидкой массы, поверхности уровня которой представляют собой эллипсоиды вращения, при этом распределение плотностей и скоростей вращения может быть произвольным.

Формулы сохраняют свою силу и для скачкообразного изменения плотности, тогда $-\rho' \, da$ будет конечным приращением. Поэтому данную теорему можно применить и к массе целой планеты, включая ее атмосферу. Если часть экваториальных элементов расположена отдельно (кольца Сатурна, Лапласовы кольца), то необходимо, чтобы скорость вращения превосходила скорость, соответствующую эллипсоидальным поверхностям равновесия.

Если поверхности уровня гомофокальны, мы получим центр $\lambda_0 = \infty$ и $\varphi = 1$. В однородном эллипсоиде φ не зависит от ρ и стремится к 1, когда λ стремится к ∞ (сплющенный диск):

$$\varphi = \frac{\omega^2 y}{\mathrm{Y}} = \frac{(3+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda - 3\lambda}{(1+\lambda^2)\operatorname{arctg}\lambda - \lambda}.$$

Замечание. Если бы какая-то из поверхностей была сферической, то есть если бы $\lambda_r = 0$, мы бы получили

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int\limits_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(3\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1+l^2} - 2l\right) +$$

$$+ \int\limits_r^1 (\rho_1 - \rho' \, da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(3\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+l^2} - 2\lambda\right).$$

Однако выражение с λ обращается в нуль при $\lambda = 0$, а его производная всегда отрицательна. Поэтому данное выражение всегда меньше нуля при $\lambda \neq 0$. То же самое верно для выражения с l. Отсюда следует, что ни для какой поверхности $\lambda \neq 0$ невозможно, иначе мы бы получили $\omega^2 < 0$. Так что в этом случае все время $\lambda = 0$, а также $\omega^2 = 0$, из чего следует следующая теорема.

В неоднородной жидкой массе, находящейся в состоянии равновесия, любая поверхность уровня, в частности внешняя поверхность, может быть сферической, только если скорость вращения равна нулю на всех поверхностях уровня, причем тогда все они будут сферическими.

3. *Производную от скорости* нетрудно получить, записав формулу

$$u_l = \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2} = \frac{l^3}{1+l^2} - \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}(l - \operatorname{arctg} l).$$

Затем, полагая

$$\mathrm{R} = \int\limits_o^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(l - \operatorname{arctg} l)\, da + \int\limits_r^1 (\rho_1 - \rho' \, da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}(\lambda - \operatorname{arctg}\lambda),$$

мы получим, что всегда $\mathrm{R} > 0$. Если заметить, что $\int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da) = \rho$, формула ($A$.2.18) примет вид

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int\limits_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} \frac{l^3}{1+l^2}\,da + \rho - \frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\,\mathrm{R}.$$

Тогда, дифференцируя по r, получаем

$$\frac{1+\lambda^2}{4\pi f}\frac{d\omega^2}{dr} = \frac{\mathrm{R}}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr} - \frac{1}{r}\int\limits_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{(1+l^2)^2}\frac{l^3}{\lambda^3}\,(\lambda_r^2 - l^2)\,da.$$

Если поверхности гомотетичны, то $d\lambda^2 = 0$; если они гомофокальны, то $l^2 = \lambda_r^2$ и $d\lambda^2 < 0$; в обоих случаях $d\omega^2 < 0$. Скорость растет от поверхности к центру.

Если скорость вращения равномерна, то

$$\frac{d\omega^2}{dr} = 0, \qquad \frac{\mathrm{R}}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr} = \frac{1}{r}\int\limits_0^r -\rho' \frac{1+\lambda^2}{(1+l^2)^2}\frac{l^3}{\lambda^3}\,(\lambda_r^2 - l^2)\,da.$$

Данное соотношение можно проверить двумя способами: $l < \lambda_r$, $d\lambda^2 > 0$, эксцентриситет возрастает от центра к поверхности. Или же $l > \lambda_r$, тогда эксцентриситет был бы больше, чем у соответствующих гомофокальных поверхностей. И тогда бы с уменьшением эксцентриситета было бы $d\lambda^2 < 0$. Мы увидим, что этот случай реализуется только при значительной величине поверхностного эксцентриситета: $\lambda_1 > 2{,}53$. Впрочем, из общего доказательства, проведенного в предыдущей главе, нам известно, что данный случай возникать не может, так как при постоянной ω величина λ возрастает.

В случае равномерной скорости в центре всегда

$$\frac{\mathrm{R}_0}{1+\lambda^2}\frac{d\lambda^2}{dr} = -\rho' \frac{1+\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}\frac{l^3}{\lambda^3}\,(\lambda_r^2 - l^2)\frac{da}{r},$$

отношения равны единице, а $l^2 = \lambda_0^2$, так что $d\lambda^2 = 0$. Эксцентриситет стремится к минимальному пределу.

Кривые, задающие эксцентриситет в различных случаях, представлены на рисунке 8.

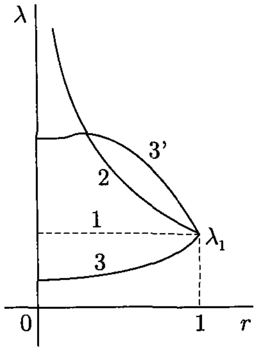


Рис. 8. Законы, по которым изменяется эксцентриситет. 1. Гомотетичные поверхности. 2. Гомофокальные поверхности. 3. Постоянная скорость

Замечание. Аналогично можно найти, как изменяется скорость в зависимости от широты. Действительно, формулам, задающим l и поверхность S_n, можно придать вид

$$x^2 + \frac{y^2}{1+l^2} = \frac{\lambda^2}{l^2}\,a^2, \quad x^2 + \frac{y^2}{1+\lambda_r^2} = r^2.$$

Исключая y^2 из этих двух соотношений, получаем

$$\frac{x^2}{r^2}\,l^4 + \left(1 + \lambda_r^2 - \frac{x^2}{r^2}\,\lambda_r^2 - \frac{a^2}{r^2}\,\lambda^3\right) l^2 - \frac{a^2}{r^2}\,\lambda^2 = 0. \qquad (a)$$

Отсюда

$$\frac{dl}{dx^2} = \frac{l^3}{2}\,\frac{\lambda_r^2 - l^2}{a^2\lambda^2 + x^2 l^2}.$$

Выражение для u также дает нам

$$\frac{du}{dl} = \frac{2l^2}{(1+l^2)^2}\,\frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+\lambda_r^2}.$$

Однако ω^2 зависит от x^2 только посредством переменной l. Получаем

$$\frac{1}{2\pi f}\,\frac{\partial \omega^2}{\partial x^2} = \int\limits_0^r -\rho'\,\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,\frac{\partial u}{\partial l}\,\frac{\partial l}{\partial x^2}\,da =$$

$$= \int\limits_0^r -\rho'\,\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\,\frac{l^3}{\lambda^3}\left(\frac{\lambda_r^2 - l^2}{1+l^2}\right)^2 \frac{da}{a^2\lambda^2 + x^2 l^2}.$$

Это выражение всегда больше нуля. Для того чтобы поверхности уровня были эллипсоидальными, необходимо, чтобы на каждой поверхности скорость вращения возрастала от экватора к полюсу, и этот вывод согласуется с общим результатом предыдущей главы.

4. *Исследование функций z.* В изученных нами предельных случаях подынтегральные выражения зависят от функции

$$z = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctg} l - \frac{l}{\lambda^3}\frac{1+\lambda^2}{1+l^2} - \frac{2l}{\lambda^3}, \tag{A.2.19}$$

в которой $l = \dfrac{a}{r}\lambda = \lambda\varepsilon$ при $0 < \varepsilon < 1$ и которая становится равной

$$y = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{3}{\lambda^2} \tag{A.2.20}$$

при $l = \lambda$ или $\varepsilon = 1$.

Это выражение (A.2.20) задает соотношение между скоростью вращения однородного эллипсоида и его эксцентриситетом. Равное нулю при $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$, оно достигает максимума $0{,}22467\ldots$ при $\lambda = 2{,}5293\ldots$.

Функции z, отличающиеся от него только значением ε или l, ведут себя аналогично. При $\lambda = 0$ или $\lambda = \infty$ все они равны 0. Кроме того, все они меньше соответствующего значения y. Действительно, находим

$$\frac{dz}{dl} = \frac{2l^2(\lambda^2 - l^2)}{\lambda^3(1+l^2)^2}, \qquad \frac{dz}{d\varepsilon} = \frac{2\lambda^2\varepsilon^2(1-\varepsilon^2)}{(1+\lambda^2\varepsilon^2)^2}. \tag{A.2.21}$$

Данное выражение, равное нулю при $\varepsilon = 0$ и $\varepsilon = 1$, всегда остается положительным; функция z изменяется в том же направлении, что и ε. Равная нулю при $\varepsilon = 0$ (минимум), она возрастает до y (максимум), когда ε растет от 0 до 1. Поэтому $0 < z < y$.

Итак, если λ изменяется от 0 до ∞, то z достигает максимума, совпадая с функцией y. Положение и значение этого максимума будут очень важны для нас в дальнейшем.

Поскольку $l = \lambda\varepsilon$, можно записать

$$z = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctg}\lambda\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\lambda^2}\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda^2\varepsilon^2} - \frac{3\varepsilon}{\lambda^2}. \tag{A.2.19$'$}$$

Продифференцировав, после упрощения получаем

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{9+\lambda^2}{\lambda^4}\left[\frac{9+\lambda^2+15\lambda^2\varepsilon^2+3\lambda^4\varepsilon^2+4\lambda^4\varepsilon^4}{(9+\lambda^2)(1+\lambda^2\varepsilon^2)^2}\lambda\varepsilon - \operatorname{arctg}\lambda\varepsilon\right].$$

Обозначим выражение в скобках через v; тогда $v = 0$ при $\lambda = 0$ и $v = -\frac{\pi}{2}$ при $\lambda = \infty$. Далее находим

$$\frac{dv}{d\lambda} = \frac{2\lambda^2\varepsilon^2}{(9+\lambda^2)^2(1+\lambda^2\varepsilon^2)^3}\left[3(5-3\varepsilon^2) + \lambda^2(1-3\varepsilon^2)^2 - \lambda^4\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)\right].$$

Это выражение, сначала, при $\lambda = 0$, положительное, обращается в нуль, а затем, при λ, стремящемся к бесконечности, все время будет отрицательным. Поэтому функция v, сначала равная нулю, возрастает, достигая положительного максимума, а затем убывает до $-\frac{\pi}{2}$, проходя через *0 только* один раз. То же самое верно для dz. Итак, у функции z есть один и только один максимум.

Обозначим через u последнее из выражений, стоящих в скобках, и изобразим кривые u, v, z (рис. 9). Назовем λ_u и λ_v те значения λ, которые служат корнями функций u и v. У нас всегда $\lambda_v > \lambda_u$, потому что v обращается в нуль только после того, как пройдет через свой максимум.

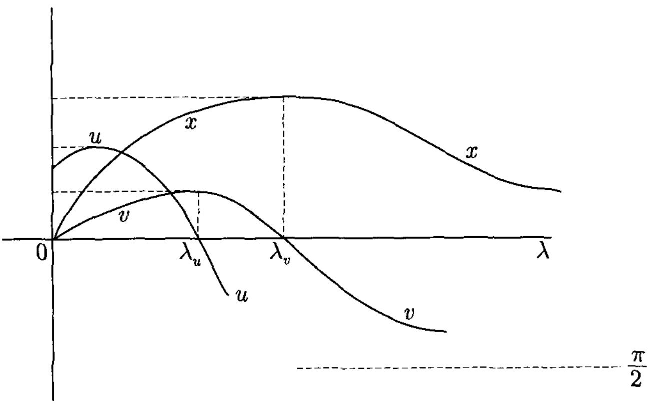


Рис. 9

Однако мы можем записать

$$-u = \lambda^4\varepsilon^2(1+\varepsilon^2) - \lambda^2(1-3\varepsilon^2)^2 - 3(5-3\varepsilon^2).$$

Это трехчлен второй степени относительно λ^2. Произведение его корней меньше нуля, а их сумма — больше:

$$\mathrm{P} = -\frac{3(5-3\varepsilon^2)}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)}, \quad \mathrm{S} = \frac{(1-3\varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2(1+\varepsilon^2)}.$$

У нас есть два корня противоположных знаков, причем бóльший из них положителен. Когда ε стремится к нулю, P и S стремятся к ∞. Положительный корень λ_u стремится к ∞. То же самое верно для λ_v. Поэтому максимум функции z уходит на ∞ вместе с λ. При $\varepsilon = 1$ имеем

$$-u = 2(\lambda^2 + 1)(\lambda^2 - 3).$$

Минимальное значение λ_u^2 равно 3. В результате $\lambda_v^2 > 3$. Когда ε изменяется от 1 до 0, соответствующий максимум функции z достигается при значении $\lambda_v^2 > 3$, которое неограниченно возрастает, когда ε стремится к 0.

В то же время значение вышеупомянутого минимума стремится к 0. Действительно, из формулы (A.2.21) следует, что z всегда изменяется в том же направлении, что и ε. Все кривые, изображающие функцию z, будут лежать внутри друг друга и будут убывать вместе с ε, как и их максимумы (рис. 10).

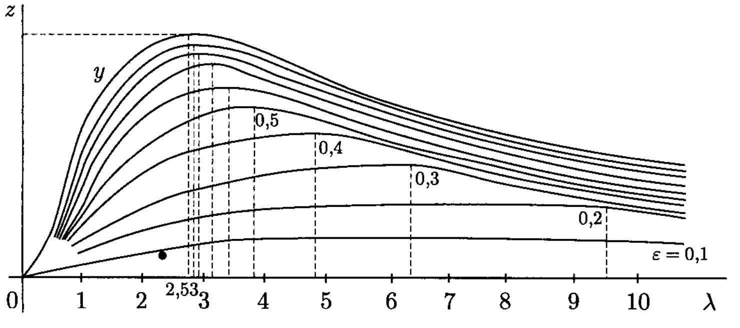


Рис. 10. Кривые значений функции z для 10 значений ε

Раскладывая в ряд $z(\lambda)$ около нуля, получаем

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{4}{9}\frac{9+\lambda^2}{\lambda^4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\varepsilon^2\right)\lambda^5\varepsilon^3 = \frac{4}{9}(9+\lambda^2)\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\varepsilon^2\right)\lambda\varepsilon^3.$$

При $\lambda = 0$ в начале координат производная обращается в нуль и кривая касается оси λ.

Проведя расчеты для значений ε, взятых с шагом $0,1$, получаем следующую таблицу, в которой указаны значения dz, а также положения и значения максимумов (мы взяли за единицу число 0,0001). В результате можно изобразить соответствующие кривые, как показано на рис. 10.

Таблица значений $\frac{dz}{d\lambda}$. В предпоследнем столбце, где $\varepsilon = 1$, заданы значения $\frac{dy}{d\lambda}$.

$\varepsilon =$	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1	Среднее
λ												
2,53	0	0,0029	154	281	310	271	136	117	50	19	0	0,014
3	0	0,0030	150	242	209	141	67	−10	−65	−100	109	+56
4	0	0,0038	120	120	60	−16	−80	−130	−159	−179	−183	−47
6	0	0,0037	54	−6	−49	−93	−122	−145	−154	−160	−162	−79
10	0	0,0021	−3	−38	−59	−73	−80	−88	−90	−90	−90	−58
$\lambda_m = \infty$		>20	9,5	6,3	4,7	3,8	3,3	2,9	2,7	2,6	2,53	3,55
$z_m =$	0		0,069	103	135	160	177	201	214	222	225	

5. *Гомотетичные эллипсоиды.* Если все поверхности уровня гомотетичны, то $\lambda = \lambda_r = \mathrm{const}$. Можно записать

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \int_0^r -\rho' \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arctg} l - \frac{l}{\lambda^3} \frac{1+\lambda^2}{1+l^2} - \frac{2l}{\lambda^3} \right) da + + \rho \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arctg} \lambda - \frac{3}{\lambda^2} \right), \tag{A.2.22}$$

а в центре

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \rho_0 \left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3} \operatorname{arctg} \lambda - \frac{3}{\lambda^2} \right) = \rho_0 y.$$

Для ω_0 у нас есть известное выражение, связывающее ω и λ в случае *однородного эллипсоида.* Мы знаем, что тогда при изменении λ от 0 до ∞ значение $\frac{\omega^2}{2\pi f \rho_0} = y$ возрастает от 0 до своего максимума 0,22467... (при $\lambda = 2{,}5293$), а затем убывает до 0.

При $\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} > 0{,}22467\ldots$ равновесие с эллипсоидальной формой невозможно. При $\frac{\omega^2}{2\pi f \rho} < 0{,}22467\ldots$ имеются два значения λ и два равновесных эллипсоида.

Мы видели, что в этом случае скорость вращения убывает от центра к поверхности. Поэтому если центральная скорость ограничена сверху, то все остальные, в частности скорость поверхности, тоже достигают предела, который меньше, чем предел для ω_0.

Формулу (A.2.22) можно записать в виде

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \rho y + \int_0^r -\rho' z \, da. \tag{A.2.23}$$

Отсюда сразу получаем

$$\frac{1}{2\pi f}\frac{d\omega^2}{d\lambda} = \rho\frac{dv}{d\lambda} + \int_0^r -\rho'\frac{dz}{d\lambda}\,da. \qquad (A.2.24)$$

Функция z, стоящая под знаком интегрирования, принимает все значения от 0 до y, так как ε меняется от 0 до 1. То же самое верно для dz.

Когда λ изменяется от 0 до 2,53, dy и все dz больше нуля (рис. 10). Все скорости возрастают.

Когда λ превосходит значение 2,53, dy становится отрицательным, причем его абсолютная величина будет все больше и больше. С другой стороны, все бóльшее число дифференциалов dz тоже становится отрицательным. Обязательно наступит такой момент, когда при определенном значении λ_m величины λ правая часть $(A.2.24)$ обратится в нуль, после чего она станет меньше нуля. Скорость вращения ω соответствующего слоя S_r достигает максимума, после чего убывает.

Начиная с центра, второе слагаемое в формуле $(A.2.24)$ растет вместе с r, тогда как величина первого слагаемого, напротив, убывает вместе с r. Поэтому значение выражения станет отрицательным тем позднее, чем дальше от центра расположен данный слой, и ω_1 достигнет своего максимума в последнюю очередь при определенном значении λ_1.

В итоге получаем

$$2{,}53 < \lambda_m < \lambda_1.$$

Предельное значение λ_1 и скорость, с которой различные слои достигают своих максимумов, зависят от распределения *плотностей*.

Данное распределение сводится к трем основным типам в зависимости от того, чему равно ρ'': $\rho'' = 0$, $\rho'' < 0$ или $\rho'' > 0$, то есть когда изменение постоянно, ускоряется к поверхности или ускоряется к центру (см. кривые 1, 2, 3 на рис. 11).

Из формулы $(A.2.23)$ сразу понятно, что при одном и том же значении λ величина ω^2 будет тем дальше от ω_0^2, чем сильнее ρy отличается от $\rho_0 y$, и что $\int_0^r -\rho'\,da = \rho_0 - \rho$ будет в целом тем больше, чем ярче выражено сгущение к центру. Из формулы $(A.2.24)$ следует, что то же самое верно для максимального значения ω^2.

В результате значения и максимумы скоростей ω, которые в однородном случае совпадают с ω_0, будут тем слабее и будут достигаться при тем бóльших значениях λ, чем сильнее выражена неоднородность или чем сильнее ρ_0 отличается от ρ_1.

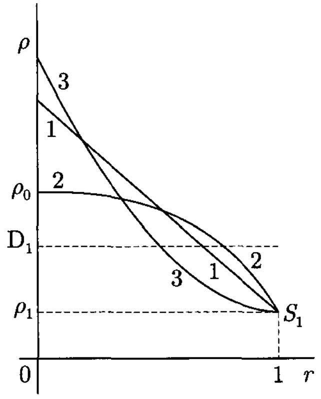


Рис. 11. Законы распределения плотностей. 1. $\rho'' = 0$. 2. $\rho'' < 0$. 3. $\rho'' > 0$

Кривые, задающие изменение скоростей на глубине, при одном и том же значении λ должны быть аналогичны кривым, которые задают соответствующие плоскости.

Кривые, описывающие изменение скоростей в зависимости от λ, будут аналогичны графикам функций z и графику функции y в случае ω_0 (рис. 12). Если провести горизонтальную прямую, то мы увидим, что каждому значению ω_1, которое меньше максимального, соответствуют два различных значения λ, но для них требуется какое-то другое значение ω_0 и другое распределение скоростей. Если значение ω_1 больше максимального, то поверхности уже не могут иметь форму эллипсоида.

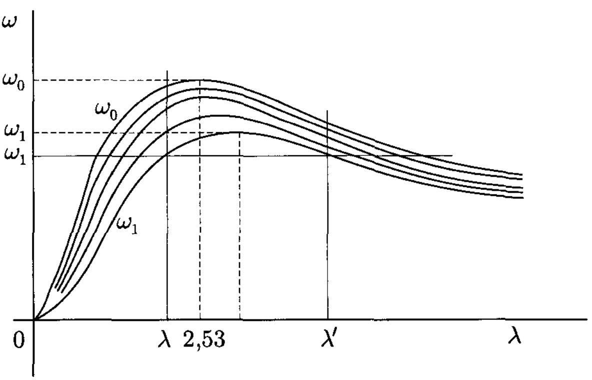


Рис. 12. Кривые, изображающие скорости вращения в случае гомотетичных поверхностей

После некоторых подсчетов из таблицы значений dz можно увидеть, что при $\rho'' = 0$ максимальное значение скорости ω_1 достигается при $\lambda_1 = 3{,}55$, когда среднее положительных и отрицательных приращений равно нулю.

Для того чтобы максимум достигался при $\lambda_1 = 3$, достаточно, чтобы на расстоянии 0,7 от центра плотность составляла еще $\rho = {}^3\!/_4\rho_0$, что соответствует $dz = 0$. Тогда $\rho'' < 0$.

Для того чтобы максимум отодвинулся до $\lambda_1 = 4$, необходимо, чтобы на расстоянии 0,5 плотность уже уменьшалась до $\rho = {}^1\!/_3\rho_0$. Эти три значения λ_1 вычисляются для случая, когда $\rho_1 = 0$; в действительности область их изменения еще меньше. Практически, она незаметна.

В случае Земли при $\rho'' = 0$, $\rho_1 = 2{,}5$ и $\rho_0 = 10$ мы бы получили максимально $\dfrac{\omega_0^2}{2\pi f} = 0{,}220\rho_0$; $\dfrac{\omega_1^2}{2\pi f} = 0{,}163\rho_0$; в однородном случае — $\mathrm{D}_1 y = 0{,}125\rho_0$.

6. *Гомофокальные эллипсоиды.* Если поверхности уровня гомофокальны, то $b^2 - a^2 = b_1^2 - a_1^2$, где $b^2 = a^2(1+\lambda^2)$. Отсюда $\lambda a = \lambda_1 a_1$. Тогда получаем $l = \frac{a}{r}\,\lambda = \lambda_r$, поскольку $\lambda a = r\lambda_r$, и формула (A.2.18) принимает вид

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arctg}\lambda_r - \frac{3\lambda_r}{1+\lambda_r^2}\right)\int_0^r -\rho'\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\,da + \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_r^2}\right)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}; \tag{A.2.25}$$

теперь формулы

$$a\lambda = r\lambda_r \quad \text{и} \quad \mathrm{V} = \frac{4}{3}\pi a^3(1+\lambda^2) \tag{A.2.25$'$}$$

дают нам

$$\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3} = \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_r}\frac{1+\lambda_r^2}{\lambda_r^3},$$

откуда

$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arctg}\lambda_r - \frac{3}{\lambda_r^2}\right)\int_0^r -\rho'\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_r}\,da + \int_r^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_r}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{\lambda_r^3}\frac{1+\lambda_r^2}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda_r^3}\right). \tag{A.2.26}$$

Мы видим, что скорость растет от поверхности к центру: $\omega_1 < \omega < \omega_0$. В то же время с учетом

$$\int_0^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1} = \frac{\mathrm{M}_1}{\mathrm{V}_1} = \mathrm{D}_1$$

получим, что *на поверхности*

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \left(\frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\operatorname{arctg}\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}\right)\mathrm{D}_1 = \mathrm{D}_1 y. \qquad (A.2.27)$$

Итак, вращение и эксцентриситет связаны друг с другом по той же самой формуле, что и для однородного эллипсоида с плотностью D_1; это выражение похоже на формулу для ω_0 в случае гомотетичных эллипсоидов, но здесь ω_1 не зависит от закона изменения плотностей.

В центре $\lambda_r = \infty$, и формула $(A.2.25)$ дает нам

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\left(\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}. \qquad (A.2.28)$$

С учетом (А.2.25′) получаем

$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \frac{1+\lambda_1^2}{\mathrm{V}_1\lambda_1^3}\int_0^1 \mathrm{V}\left(\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right)(\rho_1 - \rho'\,da). \qquad (A.2.28')$$

При $\lambda_1 = 0$

$$\lambda = \frac{a_1}{a}\lambda_1 = 0$$

и

$$\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} = \frac{2}{3}\lambda^3 - \frac{4}{5}\lambda^5 - \ldots.$$

Из формулы $(A.2.28)$ следует, что

$$\omega_0^2 = \frac{4}{3}\pi f \rho_0.$$

При $\lambda_1 = \infty$ в силу (А.2.28′) находим, что $\omega_0 = 0$.

Пусть

$$v = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}\right).$$

Тогда
$$\frac{dv}{d\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right) = -\frac{y}{\lambda},$$
то есть v изменяется в направлении, противоположном изменению λ, а следовательно, и λ_1. Таким образом, ω_0 все время убывает и меняется от $\frac{4}{3}\pi f\rho_0$ до 0, когда λ возрастает от 0 до ∞.

Чтобы исследовать, как зависит изменение ω_0 от *плотности*, обозначим
$$u = \operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2}, \quad \frac{du}{d\lambda} = \frac{2\lambda^2}{(1+\lambda^2)^2}.$$

Подынтегральное выражение в формуле (А.2.28′) возрастает вместе со значение λ от поверхности к центру, где $u_0 = \frac{\pi}{2}$, поскольку $\lambda_0 = \infty$. Поэтому ω_0 растет тем сильнее, чем больше становится ρ' при приближении к центру, то есть чем заметнее концентрация. В пределе у нас было бы
$$\frac{\omega_0^2}{2\pi f} = \frac{1+\lambda_1^2}{V_1\lambda_1^3}\frac{\pi}{2}M_1 = \frac{\pi}{2}\frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}D_1.$$

Итак, имеются два ограничения сверху, одно из которых зависит от центральной плотности, другое — от поверхностного эксцентриситета; они дополняют, но не исключают друг друга:
$$\omega_0^2 < \frac{4}{3}\pi f\rho_0, \quad \omega_0^2 < \pi^2 f\frac{1+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}D_1. \qquad (A.2.29)$$

Все другие скорости и изображающие их кривые заключены между кривыми, которые соответствуют формулам (A.2.27) и (A.2.29).

Поскольку
$$\int_0^r -\rho' V\,da = -\rho V_r + \int_0^r \rho\,dV = (D-\rho)V_r,$$

формуле (A.2.26) можно придать вид
$$\frac{\omega^2}{2\pi f} = (D-\rho)y + \int_r^1 \frac{V}{V_r}z(\rho_1 - \rho'\,da), \qquad (A.2.30)$$

где

$$z = \frac{3+\lambda_r^2}{\lambda_r^3}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{\lambda_r^3}\frac{1+\lambda_r^2}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{\lambda_r^3}$$

— это уже рассмотренная нами функция z, в которой l заменили на λ, а λ на λ_r. Имеем

$$\lambda = \frac{r}{a}\lambda_1 = \lambda_r\varepsilon = l.$$

Поскольку интегрирование проводится от r до l, ε изменяется от 1 до $\frac{r}{a_1} < 1$, а не от 1 до 0. Дробь, зависящая только от z, стоит под каждым знаком интегрирования там, где ε превосходит значение для слоя S_r. Изменение ρ'' то же, что и в предыдущем случае, и выводы, к которым мы придем, будут аналогичны.

Таким образом, при возрастании λ_1 скорости внутренних слоев будут поочередно достигать своих максимумов от центра к поверхности, где ω_1 начнет убывать в последнюю очередь, как и для гомотетичных поверхностей.

Действительно, мы видели, что максимумы функции z возникают при все бо́льших и бо́льших значениях λ_r. Но здесь величины λ возрастают от поверхности к центру: $\lambda_r = \frac{\lambda_1}{r}$. В том же самом порядке они достигают значения λ_m, соответствующего максимуму каждой поверхности. То же самое верно для скоростей ω.

Прежде всего запишем таблицу соответствующих значений λ_m и λ_r при $\lambda_1 = 2{,}53\ldots$, то есть при максимальном ω_1.

ε	1	0,9	0,8	0,7	0,6	0,5	0,4	0,3	0,2
λ_r	2,53	2,8	3,2	3,6	4,2	5,0	6,3	8,4	12,6
λ_m	2,53	2,6	2,7	2,9	3,3	3,8	4,7	6,3	9,5
$\lambda_r - \lambda_m$	0	0,2	0,5	0,7	0,9	1,2	1,6	2,1	3,1

Когда скорость ω_1 достигает своего максимума, функции z для всех поверхностей, а следовательно, все другие ω уже прошли свои максимальные значения, потому что $\lambda_r > \lambda_m$ для всех z (рис. 13).

Более того, λ_r растет всегда быстрее, чем λ_m. Действительно, изучая функции z, мы с помощью формулы $(A.2.21)$ видели, что $\frac{dz}{dl} > 0$, то есть z и l изменяются в одном и том же направлении. Однако здесь в максимальном случае $l = \lambda_m\varepsilon$. Так что данная величина $\lambda_m\varepsilon$ изменяется в том же направлении, что и z_m, и убывает вместе с ε. Наоборот, на гомофокальных поверхностях $\lambda_r\varepsilon = \lambda_1$. Поэтому $\lambda_r\varepsilon$ остается константой, и λ_r растет быстрее, чем λ_m.

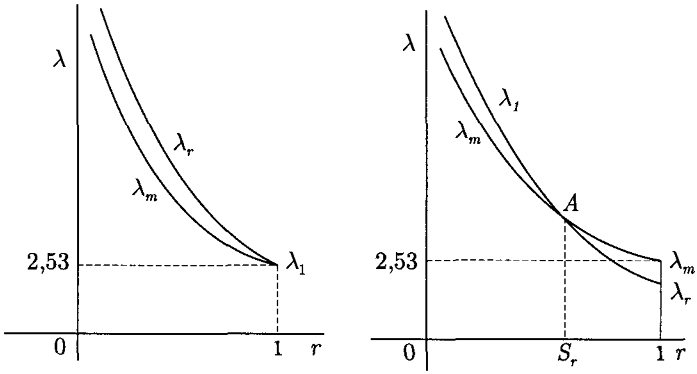


Рис. 13 и 13'. Сравнительные графики λ и λ_m в случае гомофокальных поверхностей

Таким образом, если в какой-то момент времени для некоторого $\lambda_1 <$ $< 2{,}53$ значение λ_r поверхности S_r совпадает с λ_m соответствующей функции z, то все λ и все z, лежащие внутри S_r, уже прошли свои максимумы, а все внешние λ и все z — еще нет (рис. 13'). Однако из (A.2.30) получаем

$$\frac{1}{2\pi f}\frac{d\omega^2}{d\lambda} = (\mathrm{D} - \rho)\frac{dy}{d\lambda} + \int\limits_r^1 \frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_r}\frac{dz}{d\lambda}\,(\rho_1 - \rho'\,da), \qquad (A.2.31)$$

где $d\omega^2$ зависит только от внешних dz, здесь они все положительны, и от dy. Итак, у нас $d\omega^2 > 0$ и ω^2 все еще возрастает, как и все внешние ω[8]. Пусть λ_1 убывает от 2,53 до 0, тогда все λ по очереди от поверхности к центру пройдут через значение λ_m соответствующей функции z. Максимум скорости ω будет отодвигаться в том же направлении.

В результате при возрастании λ_1 слои, близкие к центру, пройдут через свои максимумы, как только λ_1 перестанет быть равно 0, потому что их λ_0 бесконечно велики; после этого друг за другом пройдут через максимумы другие слои вплоть до поверхности. Здесь можно повторить все то, что было сказано про изменения, вносимые переменной плоскостью, в случае гомотетичных поверхностей. Но здесь ω_1 зависит только от D_1, а не от ρ. Получаем кривые, изображенные на рисунке 14.

7. *Равномерная скорость и классификация скоростей.* Воспользуемся полученными выше результатами. Формула (A.2.18) на поверхности при-

[8] Г-н Ами уже приводил это рассуждение в более сложной форме в своей работе Étude sur la figure des corps célestes, с. 14–20.

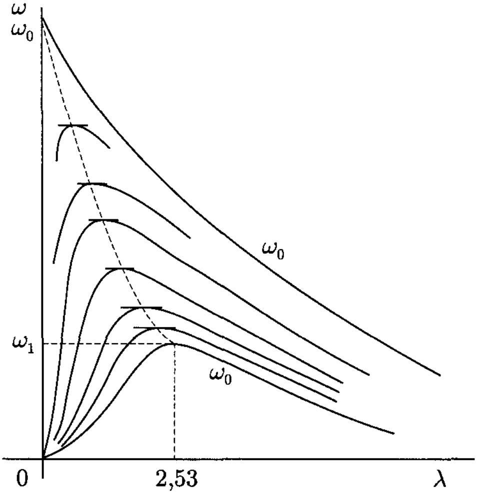


Рис. 14. Графики скоростей вращения в случае гомофокальных поверхностей

нимает вид:

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_1^2}{1+\lambda_1^2}\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_1^2}\right). \tag{A.2.30}$$

Если $\lambda_1 = 0$, то

$$l = \lambda = \lambda_1 = 0,$$

так как здесь $\lambda \leqslant \lambda_1$, и тогда

$$\omega_1 = 0.$$

Если $\lambda_1 = \infty$, то все λ бесконечны, и фигура вырождается в сплющенный диск, кроме того, в силу $(A.2.30)$ $\omega_1 = 0$.

Иначе говоря, как при $\lambda_1 = \infty$, так и при $\lambda_1 = 0$ скорость равна нулю. Внутри этого промежутка она достигает максимума, как и в случае однородной жидкости.

Формулу $(A.2.30)$ можно преобразовать к виду

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \int_0^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2}\frac{\lambda_1^3}{\lambda^3}\,z = \int_0^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2}\frac{a^3}{r_1^2}\frac{\lambda_1^3}{l^3}\,z.$$

Однако при изменении λ множитель $\dfrac{1+\lambda^2}{1+\lambda_1^2}\dfrac{a^3}{r_1^3} = \dfrac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1}$ остается постоянным на каждой поверхности. Если λ_1 остается тем же самым, то значения подынтегрального выражения меняются только вместе с $\frac{z}{l^3}$, когда изменяются внутренние λ, то есть когда мы переходим от одного из рассмотренных случаев к другому. Получаем

$$\frac{d}{dl}\frac{z}{l^3} = \frac{1}{l^4}\left[\frac{2l^3(\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^3(1+l^2)^2} - 3z\right].$$

Если обозначить выражение в скобках через u, то $u = 0$ при $l = 0$, $z = 0$ и $u = -3y$ при $l = \lambda_1$. Далее, получаем

$$\frac{du}{dl} = -\frac{4l^4}{\lambda_1^3(1+l^2)^2} - \frac{8l^4(\lambda_1^2 - l^2)}{\lambda_1^3(1+l^2)^3},$$

то есть величину, которая меньше нуля при $l < \lambda_1$, так что функция u все время отрицательна, и подынтегральные выражения изменяются вместе с z в направлении, обратном изменению l или λ ($l = \lambda\varepsilon$).

Итак, для одного и того же λ_1 поверхностная скорость растет при переходе от гомофокальных слоев к гомотетичным, а затем к слоям, соответствующим случаю равномерной скорости, так как тогда λ для каждого слоя убывает. Иначе говоря, у нас

$$\omega_1 \text{ гомофокальная} < \omega_1 \text{ гомотетичная} < \omega_1 \text{ равномерная.} \qquad (A.2.31)$$

Графики ω_1 располагаются друг над другом в том же порядке.

В центре формула (A.2.18) примет вид

$$\frac{\omega_0^1}{2\pi f} = \int_0^2 (\rho_1 - \rho'\,da)\frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{\lambda}{1+\lambda^2} - \frac{2\lambda}{1+\lambda_0^2}\right) =$$

$$= \int_0^1 (\rho_1 - \rho'\,da)\mathrm{Z}_0,$$

$$\frac{d\mathrm{Z}_0}{d\lambda} = -\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\frac{1}{\lambda}\left(\frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}\right) = -\frac{3+\lambda_0^2}{1+\lambda_0^2}\frac{y}{\lambda}. \qquad (A.2.32)$$

Для одного и того же λ_0 значение каждого подынтегрального выражения изменяется в направлении, противоположном изменению λ. Однако, поскольку в этом случае λ_0 — одно и то же, значения λ возрастают от случая равномерной скорости к случаю гомотетичных, а затем гомофокальных поверхностей. Получаем

$$\omega_0 \text{ равномерная} < \omega_0 \text{ гомотетичная} < \omega_0 \text{ гомофокальная.} \qquad (A.2.33)$$

Но для гомотетичных поверхностей $\omega_0^2 = 2\pi f \rho_0 y$. Поэтому, когда в случае равномерной скорости значение λ_0 изменяется от 0 до ∞, значение скорости всегда будет меньше, чем вышеупомянутое.

График равномерной скорости ω, соответствующей λ_0, расположен ниже, чем график гомотетической ω_0. С другой стороны, кривая, соответствующая изменениям λ_1, в силу $(A.2.31)$ целиком лежит выше, чем для гомотетической ω_1. Эти две кривые лежат между графиками гомотетических ω_1 и ω_0.

Это очевидно вплоть до точек максимума, так как тогда кривая, соответствующая λ_1, лежит справа и выше, чем для λ_0, потому что у нас $\lambda_0 < \lambda_1$. То же самое верно и после точек максимума, по крайней мере до определенного предела. То, что это верно всегда, не доказано. Все наши результаты изображены на рисунке 15, где показано взаимное расположение различных кривых.

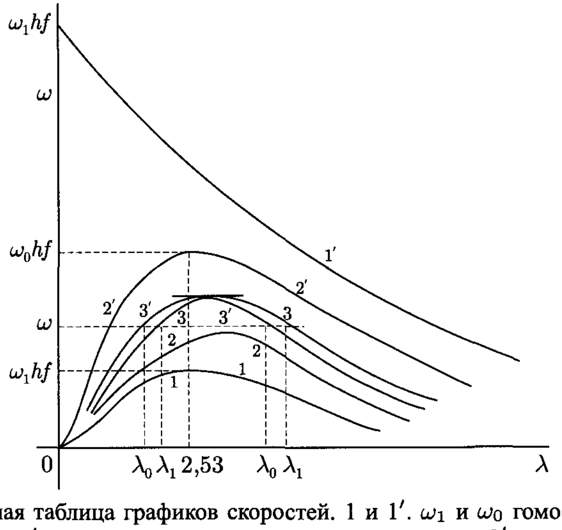


Рис. 15. Сводная таблица графиков скоростей. 1 и 1′. ω_1 и ω_0 гомофокальных поверхностей. 2 и 2′. ω_1 и ω_0 гомотетичных поверхностей. 3 и 3′. Кривые, показывающие, как постоянная скорость зависит от λ_1 и λ_0

Только график гомофокальных ω_1 не зависит от распределения плотностей, а зависит только от D_1. Другие кривые поднимаются над ним тем выше, чем сильнее выражена суммарная неоднородность.

Для любого значения ω, которое меньше максимального, как и в однородном случае, существуют два разных значения эксцентриситета, но соответствующая скорость всегда будет больше.

Кроме того, понятно (рис. 15), что для данного эксцентриситета λ_1 равномерная скорость всегда соответствует скорости гомотетичного или гомофокального слоев. Так что от этих двух случаев можно перейти к случаю равномерной скорости, попросту увеличив скорость внешних слоев, чтобы она совпала с равномерной, и уменьшив скорость нижних слоев, но не изменяя при этом эксцентриситет λ_1.

В итоге, учитывая, что равномерная скорость ω неоднородного эллипсоида, вращающегося как одно целое, лежит между гомотетической скоростью ω_0 и гомофокальной ω_1, можно записать

$$\mathrm{D}_1 y < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_o y, \quad \text{где} \quad y = \frac{3+\lambda_1^2}{\lambda_1^3}\operatorname{arctg}\lambda_1 - \frac{3}{\lambda_1^2}. \qquad (A.2.34)$$

8. *Несколько предельных случаев.* Помимо трех основных случаев, мы изучим еще три.

1. Если при удалении от поверхности к центру эксцентриситет возрастает быстрее, чем в случае гомофокальных поверхностей, то в силу тех же соображений, которые привели нас к формуле (A.2.31), будет справедливо неравенство

$$\omega_1 < \text{гомофокальной } \omega_1,$$

и эта скорость стремится к 0, когда все λ стремятся к ∞.

Мы также видели, что при постоянном λ_0 скорость ω_0 изменяется в направлении, противоположном изменению λ. Поэтому здесь точно так же

$$\omega_0 < \text{гомофокальной } \omega_0,$$

и эта скорость тоже стремится к 0.

Иначе говоря, если внутренние λ стремятся к ∞, то все ω стремятся к 0.

2. Если, наоборот, внутренние λ убывают быстрее, чем в случае равномерной скорости, то в силу общего рассуждения, использованного при доказательстве формулы (A.2.31), ω_1 растет и становится больше, чем равномерная ω_1 при том же значении λ_1.

По формуле (A.2.18′), определяющей производную скорости, получаем, что здесь

$$\frac{d\omega^2}{dr} > 0,$$

так как эксцентриситет изменяется быстрее, чем в случае постоянной ω, а $\frac{d\lambda^2}{dr}$ больше, чем в случае, когда $d\omega^2 = 0$. Поэтому при удалении от поверхности скорость убывает.

В пределе мы получили бы сферические слои внутри при поверхностном эксцентриситете, равном λ_1. Однако в формуле (A.2.18) подынтегральное выражение

$$\mathrm{Z} = \frac{1+\lambda^2}{\lambda^3}\left(\frac{3+\lambda_r^2}{1+\lambda_r^2}\operatorname{arctg} l - \frac{l}{1+l^2} - \frac{2l}{1+\lambda_r^2}\right)$$

при $\lambda \to 0$ вырождается в

$$\mathrm{Z} = \frac{2}{3}\frac{1+\lambda^2}{1+\lambda_r^2}\frac{a^3}{r^3}\left(\lambda_r^2 - \frac{6}{5}\frac{a^2}{r^2}\lambda^2 - \ldots\right) = \frac{2}{3}\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_r}\lambda_r^2 - \ldots.$$

Все слагаемые обращаются в нуль вместе с λ_r. Так что скорости вращения стремятся к 0 вместе с λ.

Тогда на поверхности было бы

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi f} = \rho_1 y_1 + \frac{2}{3}\int\limits_0^1 -\rho'\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{V}_1}\lambda_1^2\,da = \rho_1 y_1 + \frac{2}{3}\lambda_1^2(\mathrm{D}_1 - \rho_1).$$

Но ω_1 не будет неограниченно возрастать вместе с λ_1, так как при λ_1, стремящемся к ∞, эта скорость проходит через максимум, а затем стремится к нулю, как мы видели, обсуждая формулу (A.2.30). К тому же этот предел достигаться не может, поскольку нам известно (п. 1), что слой может быть сферическим, только если все слои — сферические, а скорость повсюду равна нулю.

3. В случае, когда равномерная скорость возрастает вместе с λ от поверхности к центру (см. п. 2), мы бы получили, что при одном и том же λ_1

$$\omega_1 < \text{гомотетичной } \omega_1,$$

так как λ на каждом слое больше, чем на соответствующем гомотетичном слое (формула (A.2.31)). Изменяя λ_1 от 0 до ∞, мы получим кривую, лежащую внутри графика гомотетичной ω_1.

Для одного и того же λ_0 будет (формула (A.2.32))

$$\omega_0 > \text{гомотетичной } \omega_0.$$

Поэтому соответствующая кривая будет расположена выше, чем график гомотетичной ω_0. Поскольку в этом случае $\lambda_0 > \lambda_1$, из рисунка 15 понятно, что равенство $\omega_0 = \omega_1$ возможно, только если λ_1 уже прошло свой максимум. Кроме того, из доказательства, проведенного в первой главе, известно, что λ не может убывать при постоянной ω.

В итоге в случае неоднородного эллипсоида, вращающегося как одно целое, скорость вращения при λ, меняющемся от 0 до ∞, все время заключена между скоростями двух однородных эллипсоидов, у одного из которых плотность и эксцентриситет совпадают со средней плотностью и поверхностным эксцентриситетом, а у другого — с центральной плотностью и эксцентриситетом этого неоднородного эллипсоида. Скорость равна нулю при $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ и достигает максимума сразу после $\lambda = 2{,}53\ldots$.

Вплоть до значений, идущих после максимума, и, вероятно, всегда можно сказать еще, что *скорость вращения все время заключена между скоростями двух однородных эллипсоидов с тем же эксцентриситетом, причем плотность одного из них совпадает со средней, а другого — с центральной плотностью рассматриваемого эллипсоида*, кроме того, она заключена между скоростью, которую имел бы этот эллипсоид, будучи однородным, и его центральной скоростью, если бы его поверхности уровня были бы гомотетичны.

$$\mathrm{D}_1 y < \frac{\omega^2}{2\pi f} < \rho_0 y, \quad y = \frac{3+\lambda^2}{\lambda^3}\operatorname{arctg}\lambda - \frac{3}{\lambda^2}.$$

В случае однородного эллипсоида у нас $\omega^2 = 2\pi f \mathrm{D} y$.

В других случаях при движении от поверхности к центру скорость изменяется более или менее быстро в тех же пропорциях, что λ и ρ.

Во всех случаях, когда ω, ρ, λ внутри эллипсоида каким-то образом изменяются, скорость поверхностей уровня проходит тот же самый цикл, что и в случае однородного эллипсоида: она равна нулю при $\lambda = 0$ и $\lambda = \infty$ и достигает максимума более или менее после $\lambda = 2{,}53\ldots$.

Для одного и того же эксцентриситета скорость тем больше, чем сильнее выражена неоднородность распределения плотностей.

Приложение B

О некоторых новых фигурах равновесия вращающейся жидкой массы[1]

Б. Глоба-Михайленко

Введение

В настоящем мемуаре я исследую фигуры относительного равновесия, характерные для однородной жидкой массы, вращающейся вокруг неподвижной оси с постоянной угловой скоростью. Я последовательно рассматриваю три случая в зависимости от того, какие внешние силы действуют на жидкую массу. Поэтому данный мемуар делится на три части.

В первой части предполагается, что на жидкость действуют только ньютоновы силы; во второй части к ньютоновым силам добавляется слабое капиллярное давление; наконец, в третьей части я предполагаю, что на жидкость действуют одни только капиллярные силы.

Случай, когда на жидкость действуют только ньютоновы силы, уже стал классическим. Наиболее важные его свойства обнаружили Маклорен и Якоби, получившие эллипсоидальные фигуры, а также Пуанкаре и Ляпунов, открывшие бесконечно много новых фигур равновесия, бесконечно близких к эллипсоиду. Чтобы завершить данное исследование, я решил с помощью тех же самых методов найти фигуры равновесия, сколь угодно близкие к бесконечному эллиптическому цилиндру.

Я допускаю, что природа движения жидкости такова, что каждая ее струя, параллельная оси вращения, все время будет ей параллельна, поэтому для определения цилиндрической фигуры мне достаточно любое из ее плоских сечений. Если принять плоскость выбранного сечения за координатную, то задача сведется к случаю двух координат на плоскости. Именно

[1] В данном приложении приведен перевод первой части статьи Globa-Mikhaïlinko B. Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation. Перевод Шуликовская В. В.

поэтому я прежде всего ввожу понятие функции двух переменных, аналогичных функциям Ламе в пространстве. По аналогии я буду называть эти новые функции *функциями Ламе на плоскости.*

В итоге я прихожу к результатам Дж. Х. Джинса (Philosophical Transactions of the royal Society, A, том CC, 1903, с. 67–104) и сопоставляю их с работами Пуанкаре и Ляпунова.

Во второй части данного мемуара я исследую фигуры равновесия вращающейся жидкой массы, на которую действуют не только ньютоновы, но и капиллярные силы, вызывающие слабое поверхностное натяжение, пропорциональное средней кривизне пространства.

Как я показал в одной из статей, представленной в Парижскую Академию наук (13 февраля 1915), при этих условиях эллипсоидальные фигуры равновесия возникать не могут. Но я попытаюсь определить, в каком направлении капиллярное давление стремится изменить те эллипсоидальные фигуры, которые были бы характерны для жидкости в его отсутствие, и покажу, что капиллярное давление стремится скруглить все эллипсоидальные фигуры.

В третьей и последней части я рассматриваю жидкую массу, на которую действуют только капиллярные силы. Этот случай полностью согласуется с действительностью, так как Плато (Plateau) уже удалось получить такую жидкость, более того, он доказал, что при таких условиях жидкость, находящаяся в состоянии покоя, принимает форму сферы или фигуры, ограниченной участком одной из бесконечных поверхностей: цилиндра, ондулоида, нодоида, катеноида. Я заставляю эти фигуры вращаться вокруг своей оси и каждый раз получаю серию новых фигур, которые при достаточно большой угловой скорости всегда приводят к возникновению кольца.

Теперь мне бы хотелось выразить самую искреннюю благодарность и признательность моему дорогому учителю Полю Аппелю, декану Факультета естественных наук, который после моего прибытия в Париж не переставал предоставлять мне свидетельства своей благожелательности и участия, а его бесценные советы всегда руководили мной в моих исследованиях.

B.1. Функции Ламе на плоскости

1. *Уравнение Лапласа в эллиптических координатах.* Рассмотрим уравнение Лапласа

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0$$

и перепишем его в криволинейных координатах ξ, η, которые связаны с координатами x, y, по формулам

$$x = f_1(\xi, \eta); \; y = f_2(\xi, \eta).$$

Считая, что новая система ортогональна, получаем

$$ds^2 = \alpha^2 d\xi^2 + \beta^2 d\eta^2,$$

где α и β — некоторые функции от ξ и η.

При этих условиях

$$\Delta V = -\frac{1}{\alpha\beta}\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right)\right],$$

и уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{\partial V}{\partial\xi}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{\partial V}{\partial\eta}\right) = 0. \qquad (B.1.1)$$

Теперь запишем данное уравнение в эллиптических координатах. Примем за эти координаты положительные корни ρ и μ уравнения

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} - 1 = 0 \quad (\infty > \rho^2 > a^2 > \mu^2 > b^2).$$

Тогда ρ^2 соответствует эллипсу, а μ^2 — гиперболе. Фундаментальное тождество

$$\frac{x^2}{\lambda^2 - a^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} - 1 = -\frac{(\rho^2 - \lambda^2)(\mu^2 - \lambda^2)}{(\lambda^2 - a^2)(\lambda^2 - b^2)} \qquad (B.1.2)$$

дает нам формулы перехода

$$x^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(a^2 - \mu^2)}{a^2 - b^2}; \; y^2 = \frac{(\rho^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}{a^2 - b^2}. \qquad (B.1.3)$$

Из них классическим методом находим

$$ds^2 = \alpha^2 d\rho^2 + \beta^2 d\mu^2,$$

полагая

$$\begin{cases} \alpha^2 = \dfrac{\rho^2}{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}(\rho^2 - \mu^2) = \dfrac{1}{A^2}(\rho^2 - \mu^2), \\ \beta^2 = \dfrac{\mu^2}{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}(\rho^2 - \mu^2) = \dfrac{1}{B^2}(\rho^2 - \mu^2), \end{cases} \qquad (B.1.4)$$

где для краткости обозначено

$$A^2 = \frac{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}{\rho^2}; \quad B^2 = \frac{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}{\mu^2}. \qquad (B.1.5)$$

Подставляя эти значения в формулу $(B.1.1)$ и умножая на AB, мы получаем уравнение Лапласа в эллиптических координатах:

$$A\frac{\partial}{\partial\rho}\left[A\frac{\partial V}{\partial\rho}\right] + B\frac{\partial}{\partial\mu}\left[B\frac{\partial V}{\partial\mu}\right] = 0. \qquad (B.1.6)$$

Сделаем еще одну необходимую для нас замену переменных. Пусть

$$\begin{cases} du = \dfrac{d\rho}{A} = \dfrac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}}, \\ dv = \dfrac{d\mu}{B} = \dfrac{\mu d\mu}{\sqrt{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}}, \end{cases} \qquad (B.1.7)$$

что дает нам

$$\begin{cases} u = \int\limits_a^\rho \dfrac{\rho d\rho}{\sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}} = \ln\left[\dfrac{\sqrt{\rho^2 - a^2} - \sqrt{\rho^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right], \\ v = \int\limits_a^\mu \dfrac{\mu d\mu}{\sqrt{(a^2 - \mu^2)(\mu^2 - b^2)}} = \dfrac{1}{2}\arccos\left[\dfrac{2\mu^2 - a^2 - b^2}{a^2 - b^2}\right]. \end{cases} \qquad (B.1.8)$$

Тогда уравнение Лапласа принимает вид

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial v^2} = 0. \qquad (B.1.9)$$

2. *Гармонические многочлены от x и y в эллиптических координатах.* Любой гармонический многочлен от x, y можно представить как сумму следующих многочленов:

$$Q(x^2, y^2);\; xQ(x^2, y^2);\; yQ(x^2, y^2);\; xyQ(x^2, y^2),$$

где $Q(x^2, y^2)$ обозначает многочлен от x^2, y^2, симметричный относительно x^2 и y^2.

В эллиптических координатах у этих четырех многочленов есть аналоги:

$$\begin{cases} \mathrm{I} \quad \mathrm{Q}(\mathrm{x}^2, \mathrm{y}^2) = \mathrm{f}(\rho^2)\mathrm{f}(\mu^2), \\ \mathrm{II} \quad \begin{cases} xQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{a^2 - \mu^2} f(\rho^2) f(\mu^2), \\ yQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{\mu^2 - b^2} f(\rho^2) f(\mu^2), \end{cases} \\ \mathrm{III} \quad xyQ(x^2, y^2) = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}\sqrt{a^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - b^2} f(\rho^2) f(\mu^2), \end{cases} \tag{B.1.10}$$

где $f(\rho^2)$ обозначает многочлен от ρ^2, а $f(\mu^2)$ — тот же многочлен, в котором ρ^2 заменили на μ^2.

Действительно, пусть $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — корни многочлена $f(\rho^2)$; тогда с учетом тождества $(B.1.2)$ получаем

$$f(\rho^2) f(\mu^2) = \mathrm{const} \prod_{i=1}^{i=k} \left[(\rho^2 - \alpha_i)(\mu^2 - \alpha_i)\right] =$$

$$= \mathrm{const} \prod_{i=1}^{i=k} \left(\frac{x^2}{\alpha_i - a^2} + \frac{y^2}{\alpha_i - b^2} - 1\right).$$

Точно так же можно проверить и другие формулы. Формулы I и III дают нам многочлен четной степени, а формулы II — нечетной. Таким образом, для каждой степени у нас есть два типа многочленов.

3. *Уравнения, аналогичные уравнениям Ламе.* Будем искать решение уравнений $(B.1.6)$ и $(B.1.9)$ в виде произведения функций R от ρ и функции M от μ:

$$V = RM.$$

Для уравнения $(B.1.6)$ эта подстановка дает нам

$$\frac{A}{R}\frac{d}{d\rho}\left(A\frac{dR}{d\rho}\right) + \frac{B}{M}\frac{d}{d\mu}\left(B\frac{dM}{d\mu}\right) = 0, \tag{B.1.11}$$

а для уравнения $(B.1.9)$ –

$$\frac{1}{R}\frac{d^2R}{du^2}+\frac{1}{M}\frac{d^2M}{dv^2}=0. \qquad (B.1.12)$$

Тогда уравнения, задающие R и M (аналогичные уравнениям Ламе), имеют вид

$$\begin{cases} A\dfrac{d}{d\rho}\left(A\dfrac{dR}{d\rho}\right)=H^2R, \\ B\dfrac{d}{d\mu}\left(B\dfrac{dM}{d\mu}\right)=-H^2M, \end{cases} \qquad (B.1.13)$$

или, в переменных u и v,

$$\begin{cases} \dfrac{d^2R}{du^2}=H^2R, \\ \dfrac{d^2M}{dv^2}=-H^2M, \end{cases} \qquad (B.1.14)$$

где H^2 – произвольная константа, на которую нам надо будет наложить дополнительные ограничения, если мы хотим придать функциям R и M особую форму.

4. *Решения уравнения Лапласа в форме типичных многочленов, задаваемых по формуле* $(B.1.10)$. Общий интеграл первого из уравнений $(B.1.14)$ имеет вид

$$R=Ce^{Hu}+C'e^{-Hu}. \qquad (B.1.15)$$

Но из формулы $(B.1.8)$ следует, что у нас

$$\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}+\sqrt{\rho^2-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}=e^u,$$

откуда выводим

$$\frac{\sqrt{\rho^2-b^2}-\sqrt{\rho^2-a^2}}{\sqrt{a^2-b^2}}=e^{-u},$$

и интеграл $(B.1.15)$ принимает вид

$$R=C_1\left[\sqrt{\rho^2-b^2}+\sqrt{\rho^2-a^2}\right]^H+C_2\left[\sqrt{\rho^2-b^2}-\sqrt{\rho^2-a^2}\right]^H,$$

где C_1 и C_2 — новые константы.

Теперь мы видим, что для того чтобы функция R была многочленом степени n относительно переменной ρ (если считать, что $\sqrt{\rho^2 - a^2}$ и $\sqrt{\rho^2 - b^2}$ имеют порядок 1 относительно ρ), необходимо и достаточно, чтобы

$$H = n.$$

Нетрудно проверить, что, желая получить функцию R в форме

$$R = f(\rho^2) \text{ или } R = \sqrt{\rho^2 - b^2} f(\rho^2),$$

мы должны будем полагать $C_1 = C_2$, а чтобы получить R в форме

$$R = \sqrt{\rho^2 - a^2} f(\rho^2) \text{ или } R = \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - a^2)} f(\rho^2),$$

надо положить $C_1 = -C_2$. Для того чтобы коэффициент при ρ^n был равен 1, необходимо всегда брать $C_1 = |C_2| = 2^{-n}$.

Таким образом, в общем случае формула записывается в виде

$$R = 2^{-n} \left[\left(\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2} \right)^n \pm \left(\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2} \right)^n \right]. \tag{B.1.16}$$

Используя переменную u, переписываем это выражение в форме

$$R = \left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{2} \right)^n \left(e^{nu} \pm e^{-nu} \right). \tag{B.1.17}$$

Перейдем к функциям M. Общий интеграл второго уравнения (B.1.14) имеет вид

$$M = C_1' \cos(Hv) + C_2' \sin(Hv).$$

Однако для четных H

$$\cos(Hv) = f(\cos^2 v), \ \sin(Hv) = \sin v \cos v f(\cos^2 v),$$

а для нечетных H

$$\cos(Hv) = \cos v f(\cos^2 v) \text{ и } \sin(Hv) = \sin v f(\cos^2 v),$$

где $f(\cos^2 v)$ — многочлен от $\cos^2 v$. Что касается переменной v, то формула (B.1.8) дает нам

$$\cos(2v) = \cos^2 v - \sin^2 v = \left(\frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2 - \left(\frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} \right)^2,$$

откуда находим

$$\cos v = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \ \sin v = \frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}}. \tag{B.1.18}$$

Следовательно, чтобы получить функцию M в виде многочлена степени n относительно μ, необходимо положить $H = n$. Чтобы получить

$$M = f(\mu^2) \text{ или } M = \sqrt{\mu^2 - b^2} f(\mu^2),$$

надо положить $C_2' = 0$, а если хотим получить

$$M = \sqrt{a^2 - \mu^2} f(\mu^2) \text{ или } M = \sqrt{\mu^2 - b^2}\sqrt{a^2 - \mu^2} f(\mu^2),$$

надо положить $C_1' = 0$.

Таким образом каждой степени n соответствуют две функции R и две функции M. Следовательно, у нас будут два произведения RM. Эти произведения являются гармоническими функциями, симметричными относительно ρ и μ, и представляют собой типичные многочлены (заданные по формулам (B.1.10)) относительно x и y.

5. *Разложение в ряд.*

Теорема 1. *Любую функцию, которая раскладывается в тригонометрический ряд на окружности, можно разложить в ряд по функциям M на эллипсе.*

Функция M представляет собой аналог тригонометрических функций sin и cos. Действительно, сделаем замену переменных, переводящую эллипс в окружность: $x = \sqrt{\rho^2 - a^2} x_1$; $y = \sqrt{\rho^2 - b^2} y_1$. Тогда, обозначив через θ полярный угол, получим

$$x_1 = \cos\theta = \frac{\sqrt{a^2 - \mu^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \sin v,$$
$$y_1 = \sin\theta = \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 - b^2}} = \cos v,$$

а это означает, что $v = \frac{\pi}{2} - \theta$ равен углу между осью Oy и радиус-вектором, если отсчитывать его в отрицательном направлении.

Следовательно,

$$M_n = C_1 \cos nv + C_2 \sin nv = C' \cos n\theta + C'' \sin n\theta$$

— это тригонометрическая функция порядка n на окружности и одновременно функция Ламе того же самого порядка на эллипсе. Однако при данном ρ точка на эллипсе определяется значением μ, так что любая функция, заданная на эллипсе, зависит только от μ. Но, поскольку μ представляет собой функцию от v, а значит, и от θ, любую функцию переменной μ на эллипсе можно представить как функцию от θ на окружности. И если она раскладывается на окружности в тригонометрический ряд, то нам остается только выполнить обратное преобразование (превратив окружность в эллипс), чтобы увидеть, что данная функция раскладывается на нашем эллипсе в ряд по функциям M. ч. т. д.

Таким образом, любая функция одной переменной μ, удовлетворяющая общим условиям разложимости в тригонометрический ряд, допускает разложение в следующий ряд:

$$f(\mu) = \lambda_0 M_0 + \lambda_1 M_1 + \ldots + \lambda_n M_n + \ldots. \tag{B.1.19}$$

Коэффициенты данного разложения вычисляются как коэффициенты ряда Фурье, что вытекает из следующей теоремы.

Теорема 2. *Если M и M' — две различные функции Ламе, то следующий интеграл равен нулю*:

$$\int\limits_E l_0 M M'\, ds = 0,$$

где обозначено

$$l_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho_0^2 - \mu^2}},$$

и интеграл берется по эллипсу.

Применим формулу Грина к функциям $U = RM$ и $U' = R'M'$:

$$\iint\limits_E (U\Delta U' - U'\Delta U)\, d\sigma = \int\limits_E \left(U\frac{\partial U'}{\partial n} - U'\frac{\partial U}{\partial n}\right) ds.$$

Но поскольку $dn = \alpha\, d\rho$,

$$\frac{dU}{dn} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial \rho} = \frac{1}{\alpha}\frac{\partial U}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial \rho} = \frac{\partial U}{\partial u} l = lM\frac{dR}{d\rho},$$

точно так же получаем

$$\frac{dU'}{dn} = lM\frac{dR'}{d\rho},$$

и формула Грина дает нам

$$\int_E \left(l_0 MRM' \frac{dR'}{d\rho} - l_0 M'R'M \frac{dR}{d\rho}\right) ds =$$

$$= \left(R\frac{dR'}{d\rho} - R'\frac{dR}{d\rho}\right) \int_E l_0 MM'\, ds = 0.$$

Следовательно, если M и M' не совпадают, то и R не совпадают с R', так что у нас

$$\int_E l_0 MM'\, ds = 0. \quad \text{ч. т. д}$$

Таким образом, чтобы получить коэффициент λ_n разложения в ряд (B.1.19), достаточно умножить все члены ряда на $l_0 M_n\, ds$ и проинтегрировать по эллипсу:

$$\lambda_n = \frac{\int_E l_0 M_n f(\mu)\, ds}{\int_E l_0 M_n^2\, ds}. \tag{B.1.20}$$

Вычисляя

$$ds = \beta d\mu = \frac{d\mu}{l_0 B},$$

мы увидим, что оба интеграла в последней формуле не зависят от ρ, а это означает, что разложение в ряд (B.1.19) не зависит от эллипса E.

Если $f(\mu)$ – многочлен степени n, то все коэффициенты $\lambda_k (k > n)$ равны нулю, и мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 3. *Если $\Phi(\mu)$ — некоторый многочлен, а степень функции M превосходит степень многочлена $\Phi(\mu)$, то интеграл*

$$\int_E l_0 \Phi(\mu) M\, ds = 0. \tag{B.1.21}$$

6. *Корни функции R.*

Теорема 4. *Все корни функции R действительны, различны и принадлежат промежутку от a до b.*

Нетрудно увидеть, что если у функции R есть мнимые корни, кратные корни или корни, лежащие вне интервала (a, b), то ее можно разложить в произведение двух сомножителей, один из которых сохраняет знак на интервале (a, b). Покажем, что это невозможно. Пусть

$$R = \varphi(\rho)\psi(\rho),$$

где $\psi(\rho) > 0$ между a и b. Тогда, полагая в формуле $(B.1.21)$

$$M = \varphi(\mu)\psi(\mu) \text{ и } \Phi(\mu) = \varphi(\mu),$$

получаем

$$\int\limits_E l_0[\varphi(\mu)]^2\psi(\mu)\,ds = 0,$$

а это, очевидно, невозможно. Тем самым теорема доказана.

7. *Обозначения и формулы.* При $n = 0$ у нас есть одна функция R и одна функция M.

Их обозначения –

$$R_0 = 1 \text{ и } M_0 = 1.$$

При $n = 1$ имеются две функции R и две функции M.

Определим их следующим образом:

$$R_1 = \sqrt{\rho^2 - a^2}, \quad M_1 = \sqrt{a^2 - \mu^2} = \frac{1}{h}\sin v,$$
$$R_2 = \sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad M_1 = \sqrt{\mu^2 - b^2} = \frac{1}{h}\cos v,$$

Иначе говоря,

$$x = hR_1M_1; \quad y = hR_2M_2,$$

где обозначено

$$h = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}}.$$

При $n = 2$ у нас будет еще две функции R и две функции M:

$$R_3 = \sqrt{\rho^2 - a^2}\sqrt{\rho^2 - b^2}, \quad M_3 = \sqrt{a^2 - \mu^2}\sqrt{\mu^2 - b^2} = \frac{1}{2h^2}\sin 2v,$$
$$R_4 = \rho^2 - \alpha_1, \quad M_4 = \mu^2 - \alpha_1 = \frac{1}{2h^2}\cos 2v,$$

где α_1 — константа, при которой произведение $(\rho^2-\alpha_1)(\mu^2-\alpha_1)$ становится гармонической функцией. Но тогда α_1 будет корнем уравнения

$$\frac{1}{a^2-\alpha_1}+\frac{1}{b^2-\alpha_1}=0, \quad \alpha_1=\frac{a^2+b^2}{2},$$

так что у нас

$$R_4=\rho^2-\frac{a^2+b^2}{2}, \quad M_4=\mu^2-\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{1}{2h^2}\cos 2v.$$

Точно так же и дальше. Для каждой степени n мы получаем две функции R, которые будем обозначать через R_{2n-1} и R_{2n} в зависимости от того, содержит функция R множитель $\sqrt{\rho^2-a^2}$ или нет. То же самое верно для функции M. В результате для четных n

$$R_{2n-1}=\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\rho^2-b^2}f(\rho^2), \quad R_{2n}=f(\rho^2),$$

а для нечетных n

$$R_{2n-1}=\sqrt{\rho^2-a^2}f(\rho^2),\ R_{2n}=\sqrt{\rho^2-b^2}f(\rho^2).$$

Для функции M у нас есть единообразная формула

$$M_{2n-1}=2^{-(n-1)}h^{-n}\sin(nv), \quad M_{2n}=2^{-(n-1)}h^{-n}\cos(nv).$$

Отсюда сразу находим

$$R_3=R_1R_2, \quad M_3=M_1M_2,$$
$$xy=h^2R_3M_3.$$

Площадь эллипса равна

$$A=\pi\sqrt{\rho^2-a^2}\sqrt{\rho^2-b^2}=\pi R_1R_2=\pi R_3. \tag{B.1.22}$$

Найдем направляющие косинусы нормали. Поскольку нормаль касается кривой $\mu=\text{const}$, у нас $dn=\alpha\,d\rho$. Поэтому

$$\cos(n,x)=\frac{dx}{dn}=\frac{1}{\alpha}\frac{dx}{d\rho}=\frac{1}{\alpha}hM_1\frac{dR_1}{d\rho}=\frac{h}{\alpha}\frac{\rho}{R_1}M_1=h_1M_1\sqrt{\rho^2-b^2}l$$

и, окончательно,

$$\cos(n,x)=hlM_1R_2; \tag{B.1.23}$$

аналогично получаем

$$\cos(n, y) = hlM_2R_1.$$

8. *Функции Ламе второго рода.* Функция R представляет собой частные интегралы уравнения $(B.1.14)$:

$$\frac{d^2R}{du^2} = H^2R.$$

Обозначим через S еще одно решение этого уравнения, не совпадающее с R. Тогда функция S удовлетворяет тому же самому уравнению

$$\frac{d^2S}{du^2} = H^2S.$$

Умножая первое из этих уравнений на $-S$, а второе на R, складывая, получаем

$$-S\frac{d^2R}{du^2} + R\frac{d^2S}{du^2} = 0.$$

Осуществляя первое интегрирование и полагая постоянную интегрирования равной $-2n$, находим

$$R\frac{\partial S}{\partial u} - S\frac{\partial R}{\partial u} = -2n. \qquad (B.1.24)$$

Теперь S выражается с помощью квадратуры

$$S = R\int\limits_{\infty}^{u} \frac{-2n}{R^2}\,du. \qquad (B.1.25)$$

Мы будем называть эту функцию S *функцией Ламе второго рода на плоскости.*

Поскольку функция S удовлетворяет уравнению $(B.1.14)$, произведение SM удовлетворяет уравнению Лапласа. Каждой функции R соответствует некоторая функция S. Подставляя в формулу $(B.1.25)$ значение R (см.$(B.1.17)$), находим

$$S = \left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{2}\right)^{-n}\left(e^{nu} \pm e^{-nu}\right)\int\limits_{\infty}^{u} \frac{-2n\,du}{\left(e^{nu} \pm e^{-nu}\right)^2},$$

где n — степень функции R. Проведя интегрирование, получаем

$$S_{2n-1} = S_{2n} = \left(\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^n e^{-nu} = \\ = \left(\frac{2}{\sqrt{\rho^2-b^2}+\sqrt{\rho^2-a^2}}\right)^n = \left(\frac{2}{R_2+R_1}\right)^n. \quad (B.1.26)$$

Таким образом, каждой из двух функции R_{2n-1} и R_{2n} степени n соответствует ровно одна функция S_n. Легко увидеть, что функция S всегда положительна, убывает при возрастании ρ, принимает значение $S_n^0 = \left(\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\right)^n$ при $\rho^2 = a^2$ $(u = 0)$ и стремится к нулю, как ρ^{-n}, при $\rho = \infty$.

9. *Задача Дирихле для эллипса. Пусть нам дано значение некоторой гармонической функции на эллипсе. Определить эту функцию либо вне, либо внутри данного эллипса.*

Обозначим через V_0 значение нашей функции на эллипсе E_0. Тогда V_0, как известно, можно разложить в ряд по функциям

$$V_0 = \sum_0^\infty A_k M_k,$$

которому можно придать вид

$$V_0 = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k,$$

полагая $A_k = \alpha_k R_k^0 S_k^0$.

Тогда решение задачи имеет вид

$$V_i = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k M_k$$

внутри эллипса и

$$V_e = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k M_k + \varphi$$

— вне эллипса, где φ — гармоническая функция, равная нулю на эллипсе E_0 и принимающая заранее заданное значение на бесконечности. Для проверки решения достаточно заметить, что функции V_i и V_e принимают значение V_0 на эллипсе E_0, так как $(R_k)_{\rho=\rho_0} = R_k^0$ и $(S_k)_{\rho=\rho_0} = S_k^0$. Кроме того, если V_0 сходится на E_0 (при $\rho = \rho_0$), то V_i сходится при $\rho < \rho_0$, а V_e сходится при $\rho > \rho_0$, так как $R_k < R_k^0$ при $\rho < \rho_0$, а $S_k < S_k^0$ при $\rho > \rho_0$.

Если V представляет собой логарифмический потенциал, то функцию φ нетрудно определить, зная, что на бесконечности функция V должна принимать значение

$$A \ln \frac{1}{R} + \text{const},$$

где A обозначает массу притягивающих поверхностей, а R — расстояние. В этом случае функция φ равна

$$\varphi = -A(u - u_0) = A \ln \left[\frac{\sqrt{\rho_0^2 - a^2} + \sqrt{\rho_0^2 - b^2}}{\sqrt{\rho^2 - a^2} + \sqrt{\rho^2 - b^2}} \right].$$

Чтобы убедиться в этом, достаточно заметить, что $u = u_0$ на эллипсе, а на бесконечности φ принимает вид $\varphi = -A \ln R + \text{const}$.

10. *Логарифмический потенциал эллиптической полосы.* Мы будем называть *эллиптической полосой*, или *полосой, соответствующей эллипсу* E_0, часть плоскости, ограниченную периметром эллипса и произвольной кривой, бесконечно близкой к эллипсу. Мы будем называть *шириной полосы* расстояние между эллипсом и этой кривой, измеренное по нормали к эллипсу. Установив все это, попробуем решить следующую задачу. *Пусть нам дана гармоническая функция*

$$V_0 = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k^0 M_k,$$

$$V_i = \sum_0^\infty \alpha_k S_k^0 R_k M_k,$$

$$V_e = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 S_k M_k + \varphi.$$

Необходимо найти бесконечно тонкую эллиптическую полосу, однородную и с единичной плотностью, так, чтобы функция V служила для нее логарифмическим потенциалом. Обозначая площадь этой полосы через A, мы должны считать, что

$$\varphi = -A(u - u_0).$$

(Предполагается, что коэффициент всемирного тяготения $f = 1$.)

Пусть ζ — ширина полосы; пренебрегая эффектами, возникающими из-за этой ширины, мы можем рассматривать нашу полосу как линейную массу с плотностью ζ, растянутую по периметру эллипса. С другой стороны, функция V, будучи логарифмическим потенциалом, удовлетворяет уравнению

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 + \left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = -2\pi\zeta.$$

Но у нас

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 = \sum_0^\infty \alpha_k R_k^0 \frac{dS_k^0}{du} M_k \frac{du}{dn_e} - A\frac{du}{dn_e} = \sum_0^\infty \alpha_k l_0 R_k^0 {S'}_k^0 M_k - Al_0$$

и, точно так же,

$$\left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = \sum_0^\infty (-l_0) {R'}_k^0 S_k^0 M_k,$$

то есть вышеуказанное уравнение переписывается в форме

$$\left(\frac{dV_e}{dn_e}\right)_0 + \left(\frac{dV_i}{dn_i}\right)_0 = \sum_0^\infty \alpha_k M_k \left(R_k^0 {S'}_k^0 - S_k^0 {R'}_k^0\right) l_0 - Al_0 = -2\pi\zeta$$

и, окончательно,

$$\sum_0^\infty 2n\alpha_k M_k + A = 2\pi\frac{\zeta}{l_0}.$$

Однако ζ, как и l_0, — функция от μ, поэтому отношение $\dfrac{\zeta}{l_0}$ можно разложить в ряд по функциям M, что дает нам

$$\frac{\zeta}{l_0} = \sum_0^\infty \beta_k M_k = \beta_0 + \sum_1^\infty \beta_k M_k.$$

Вышеуказанная формула принимает вид

$$A + \sum_1^\infty \alpha_k 2n M_k = 2\pi\beta_0 + 2\pi\sum_1^\infty \beta_k M_k.$$

Приравнивая коэффициенты, получаем решение нашей задачи:

$$\beta_0 = \frac{A}{2\pi}, \quad \beta_k = \frac{n}{\pi}\alpha_k.$$

Если полная масса слоя равна нулю, то $A = 0$ и $\beta_0 = 0$.

Теперь займемся решением обратной задачи: *пусть нам дана однородная эллиптическая полоса с плотностью 1 и бесконечно малой шириной ζ; необходимо найти ее логарифмический потенциал.* Для этого достаточно составить функцию $\dfrac{\zeta}{l_0}$ и разложить ее в ряд по функциям M:

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{A}{2\pi} + \sum_1 \beta_k M_k.$$

Находя потенциал нашей полосы в форме

$$V_0 = \sum \alpha_k R_k^0 S_k^0 M_k,$$

мы получим

$$\alpha_k = \frac{\pi}{n}\beta_k,$$

так что искомый потенциал будет равен

$$\begin{cases} V_0 = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{\pi}{n}\beta_k R_k^0 S_k^0 M_k, \\ V_i = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{\pi}{n}\beta_k S_k^0 R_k M_k, \\ V_e = \displaystyle\sum_0^\infty \frac{\pi}{n}\beta_k R_k^0 S_k M_k - A(u - u_0). \end{cases} \tag{B.1.27}$$

Если разложение в ряд функции $\dfrac{\zeta}{l_0}$ содержит конечное число членов, потенциал V содержит столько же слагаемых.

Чтобы получить ньютонов потенциал однородного слоя по бесконечному эллиптическому цилиндру, который параллелен оси OZ, причем его направляющей служит эллипс E_0 при условии, что нам известна формула, задающая толщину этого слоя, постоянную вдоль каждой образующей,

$$\zeta = l_0 \sum_1^\infty \beta_k M_k + l_0 \frac{A}{2\pi},$$

достаточно умножить на 2 формулы, задающие логарифмический потенциал полосы с шириной ζ, соответствующей эллипсу E_0. Это даст нам следующий ответ:

$$\begin{cases} V_0 = \sum\limits_0^\infty \dfrac{\pi}{n}\beta_k R_k^0 S_k^0 M_k, \\ V_i = \sum\limits_0^\infty \dfrac{\pi}{n}\beta_k S_k^0 R_k M_k, \\ V_e = \sum\limits_0^\infty \dfrac{\pi}{n}\beta_k R_k^0 S_k M_k - A(u-u_0). \end{cases} \tag{B.1.28}$$

ПРИМЕР. Воспользуемся этими формулами в простейшем случае

$$n=0, \quad k=0, \quad M_k=1, \quad R_k=1, \quad S_k=1.$$

Пусть

$$\zeta = 2l_0M_0 = \varepsilon l_0 = \frac{A}{2\pi}l_0.$$

Тогда

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{A}{2\pi},$$

и логарифмический потенциал имеет вид

$$V_0 = \alpha_0 = \text{const}, \quad V_i = \alpha_0, \quad V_e = \alpha_0 - A(u-u_0).$$

Таким образом, потенциал постоянен внутри этой полосы, представляет собой эллиптическое кольцо, расположенное между двумя бесконечно близкими друг к другу гомотетичными эллипсами. Убедимся в этом.

Пусть

$$f = \frac{x^2}{\rho^2-a^2} + \frac{y^2}{\rho^2-b^2} = C$$

— семейство гомотетичных эллипсов. По известной формуле получаем

$$\frac{dC}{dn} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = 2\sqrt{\frac{x^2}{(\rho^2-a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2-b^2)^2}} =$$
$$= \frac{2\alpha}{\rho} = \frac{2}{l_0\sqrt{(\rho^2-a^2)(\rho^2-b^2)}}$$

и

$$\zeta = dn = \frac{1}{2} dCl_0 \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)}.$$

С другой стороны, поскольку площадь эллипса равна

$$\pi C \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)},$$

площадь эллиптического кольца имеет вид

$$A = \pi dC \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)},$$

так что у нас

$$\frac{\zeta}{l_0} = \frac{dn}{l_0} = \frac{1}{2} dC \sqrt{(\rho^2 - a^2)(\rho^2 - b^2)} = \frac{A}{2\pi}.$$

11. *Логарифмический потенциал однородного эллипса и бесконечно однородного эллиптического цилиндра.* Пусть E_0 — интересующий нас эллипс, а $V(x, y)$ — его логарифмический потенциал в точке $P(x, y)$. Добавим к этому эллипсу однородную полосу так, чтобы эллипс сместился параллельно оси OX на бесконечно малое расстояние $OO' = \varepsilon$. Новый потенциал в точке P будет равен $V(x - \varepsilon, y)$, следовательно, логарифмический потенциал полосы в той же самой точке P будет равен

$$V' = V(x - \varepsilon, y) - V(x, y) = -\varepsilon \frac{\partial V}{\partial x}$$

или, в соответствии с формулой (B.1.23),

$$\zeta = \varepsilon h l_0 R_2^0 M_1,$$

так что логарифмический потенциал будет равен

$$V'_0 = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1^0 M_1, \quad V'_i = \varepsilon \pi h R_2^0 S_1^0 R_1 M_1, \quad V'_e = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1 M_1,$$

поскольку полная площадь полосы, очевидно, равна нулю и $\varphi = 0$.

Сравнивая два выражения для V', находим

$$V'_i = -\varepsilon \frac{\partial V_i}{\partial x} = \varepsilon \pi h R_2^0 S_1^0 R_1 M_1 = \varepsilon \pi R_2^0 R_1^0 \frac{S_1^0}{R_1^0} x,$$

$$V'_e = -\varepsilon \frac{\partial V_e}{\partial x} = \varepsilon \pi h R_2^0 R_1^0 S_1 M_1 = \varepsilon \pi R_2^0 R_1^0 \frac{S_1}{R_1} x$$

и, окончательно,

$$\frac{\partial V_i}{\partial x} = -A\frac{S_1^0}{R_1^0}x, \quad \frac{\partial V_e}{\partial x} = -A\frac{S_1}{R_1}x.$$

Точно так же, выполнив параллельный перенос вдоль оси OY, мы получаем

$$V_i = -\frac{1}{2}A\left[\frac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0}y^2\right] + \text{const},$$

$$V_e = -\frac{1}{2}A\left[\frac{S_1}{R_1}x^2 + \frac{S_2}{R_2}y^2\right] - A(u - u_0) + \text{const}.$$

Для того чтобы получить ньютонов потенциал бесконечно однородного эллиптического цилиндра, параллельного оси OZ, достаточно умножить на 2 формулы, задающие логарифмический потенциал его прямого сечения. В итоге мы получим

$$V_i = -A\left[\frac{S_1^0}{R_1^0}x^2 + \frac{S_2^0}{R_2^0}y^2\right] + \text{const},$$

$$V_e = -A\left[\frac{S_1}{R_1}x^2 + \frac{S_2}{R_2}y^2\right] - 2A(u - u_0) + \text{const}, \qquad (B.1.29)$$

где A — площадь прямого сечения.

B.2. Фигуры равновесия, бесконечно близкие к неограниченным эллиптическим цилиндрам

1. *Условия равновесия вращающегося эллиптического цилиндра.* Предположим, что однородная жидкая масса, имеющая форму бесконечного эллиптического цилиндра, поверхность которого задается уравнением

$$\frac{x^2}{R_1^2} + \frac{y^2}{R_2^2} = 1,$$

вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг оси OZ. Если обозначить ее потенциал через V, то силовая функция примет вид

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2).$$

Заменяя потенциал V на его значение, находим поверхности уровня

$$U = \left(\frac{\omega^2}{2} - A\frac{S_1}{R_1}\right)x^2 + \left(\frac{\omega^2}{2} - A\frac{S_2}{R_2}\right)y^2 = \text{const}.$$

Если наш цилиндр представляет собой фигуру равновесия, то его поверхность будет поверхностью уровня, а это дает нам условие

$$(\omega^2 R_2^2 - 2AS_1R_1) = (\omega^2 R_2^2 - 2AS_2R_2),$$

из которого выводим

$$\frac{\omega^2}{A} = \frac{2(R_2S_2 - R_1S_1)}{R_2^2 - R_1^2} = \frac{4(\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2})}{(a^2 - b^2)(\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2})}. \qquad (B.2.30)$$

При данной скорости ω это условие определяет отношение осей эллипса, лежащего в прямом сечении. Подставим значение

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{4R_1R_2}{(R_1 + R_2)^2},$$

и это уравнение второй степени относительно $\frac{R_1}{R_2}$ задает нам два взаимно обратных значения этого отношения при условии, что $A = \pi R_1 R_2$, и находим

$$\frac{\omega^2}{2\pi} \leqslant \frac{1}{2} \text{ или } \omega^2 \leqslant \pi,$$

2. *Значение силы тяжести на вращающемся эллиптическом цилиндре, находящемся в относительном равновесии.*

Пусть функция имеет вид

$$U = V + \frac{\omega^2}{2}(x^2 + y^2),$$

тогда сила тяжести g представляет собой производную функции U по направлению внешней нормали, взятую со знаком «$-$»:

$$g = -\frac{\partial U}{\partial n}.$$

Но поскольку цилиндр является фигурой равновесия, имеем

$$U = f(x, y) = k\left(\frac{x^2}{\rho^2 - a^2} + \frac{y^2}{\rho^2 - b^2}\right) + \text{const},$$

где k — некоторая константа. Итак,

$$g = -\frac{\partial f}{\partial n} = -k\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} = -2k\sqrt{\frac{x^2}{(\rho^2 - a^2)^2} + \frac{y^2}{(\rho^2 - b^2)^2}}$$

и, окончательно,

$$g = \frac{2k}{lA\rho}.$$

Однако на цилиндре ρ, а значит, и A постоянны, что позволяет нам сформулировать следующую теорему.

Теорема. *На поверхности однородного бесконечного эллиптического цилиндра, вращающегося вокруг оси OZ с постоянной угловой скоростью и находящегося в состоянии относительного равновесия, справедливо равенство*

$$gl = \text{const}.$$

Вычислим эту константу. Достаточно найти, чему она равна в какой-нибудь одной точке, например при $x = R_1$, $y = 0$. Тогда у нас

$$l = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - \mu^2}} = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \frac{1}{R_2},$$

и с учетом формулы (B.2.30) получаем

$$gl = \frac{1}{R_2}\left(2A\frac{S_1}{R_1} - \omega^2\right)x = \frac{2\pi R_1 R_2}{a^2 - b^2}(S_1 R_2 - R_1 S_2).$$

Но

$$R_1 R_2 = R_3,$$

$$(S_1 R_2 - R_1 S_2) = R_1 R_2 \int\limits_{\infty}^{u} \frac{-2du}{R_1^2} - \int\limits_{\infty}^{u} \frac{-2du}{R_2^2} = \frac{a^2 - b^2}{2} S_3,$$

так что окончательно

$$gl = \pi R_3 S_3 \qquad (B.2.31)$$

3. *Поиск цилиндров бифуркации.* Задача. *Пусть нам дан жидкий эллиптический цилиндр, равномерно вращающийся и находящийся в состоянии относительного равновесия. Выяснить, существуют ли бесконечно близкие к нему фигуры равновесия.*

Деформируем цилиндр, добавив к его поверхности слой толщины ζ, постоянный вдоль каждой образующей и такой, что полная его масса равна нулю. Рассмотрим эллипс E_0, лежащий в прямом сечении. Пусть

$$\zeta = dn = P_0P.$$

Для того чтобы новая фигура находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы новая поверхность была поверхностью уровня. Пусть U_0 — силовая функция для первоначального цилиндра на его поверхности (в точке P_0). Тогда на новой поверхности (в точке P) эта функция примет значение

$$U = U_0 + \left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)_0 \zeta = U_0 - g\zeta.$$

С другой стороны, обозначая через V' потенциал слоя на нем самом, видим, что полная силовая функция в точке P будет равна

$$U + V' = U_0 + V' - g\zeta.$$

Для того чтобы новая функция была фигурой равновесия, необходимо, чтобы эта функция была постоянной. Но поскольку U_0 — константа, искомое условие принимает вид

$$V' - g\zeta = \text{const}. \qquad (B.2.32)$$

Чтобы получить потенциал V', надо разложить функцию $\dfrac{\zeta}{l_0}$ в ряд по функциям M. Допустим, что

$$\frac{\zeta}{l_0} = \sum_1^{\infty} \beta_k M_k,$$

и, так как полный объем слоя равен нулю, $\beta_0 = 0$.

Иначе говоря, потенциал данного слоя имеет вид

$$V_0' = \sum_1^{\infty} \frac{2\pi}{n} \beta_k R_k^0 S_k^0 M_k,$$

и наше условие $(B.2.32)$ принимает вид

$$\sum_1^{\infty} \beta_k \left[\frac{2\pi}{n} R_k S_k - gl\right] M_k = \text{const},$$

то есть, окончательно,

$$\sum_{1}^{\infty} \beta_k 2\pi \left[\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} \right] M_k = \text{const},$$

Это условие должно выполняться на всем эллипсе E_0, то есть при любом значении μ. Иначе говоря, это тождество, и, поскольку разложение в ряд единственно, приравнивая коэффициенты, мы получаем последовательность условий

$$\beta_k \left[\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} \right] = 0 \quad (k = 1, 2, 3, \ldots \infty). \tag{B.2.33}$$

Сама константа равна нулю, так как $\beta_0 = 0$.

При $k = 1$ величина в квадратных скобках принимает вид

$$\frac{R_1 S_1}{1} - \frac{R_3 S_3}{2},$$

и, поскольку она отличается от нуля, у нас должно быть

$$\beta_1 = 0.$$

При $k = 2$ результат будет таким же, и это даст нам

$$\beta_2 = 0.$$

При $k = 3$ величина, стоящая в квадратных скобках, тождественно равна нулю, и мы получим, что

$$\beta_3 \text{ произвольно.}$$

При $k > 0$ величина, стоящая в квадратных скобках, в общем случае не равна нулю, поэтому в общем случае у нас

$$\beta_k = 0, \text{ если } k > 3.$$

Иначе говоря, вопрос сводится к поиску цилиндров или, что, в сущности, то же самое, эллипсов E_0, для которых

$$\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} = 0. \tag{B.2.34}$$

Но к произвольному цилиндру, находящемуся в состоянии относительного равновесия, можно добавить только один слой, толщины $\zeta = \beta_3 l_0 M_3$, так, чтобы новая фигура по-прежнему находилась в равновесии.

Покажем, что этот прием не приводит к появлению новых фигур, потому что добавление данного слоя означает всего лишь поворот цилиндра вокруг оси OZ на определенный угол $d\theta$. Пусть $V(x, y)$ — потенциал нашего цилиндра в произвольной точке $P(x, y)$. Повернем наш цилиндр на угол $d\theta$. Новый потенциал в той же самой точке P имеет вид

$$V_1 = V(x - y\,d\theta, y + x\,d\theta),$$

а оттуда следует, что потенциал слоя, который мы должны были бы добавить, осуществляя это перемещение, равен

$$V' = V_1 - V = d\theta\left(-y\frac{\partial V}{\partial x} + x\frac{\partial V}{\partial y}\right),$$

или, окончательно, если заменить производные на их значения,

$$V' = 2d\theta A\left(\frac{S_1}{R_1} - \frac{S_2}{R_2}\right)xy.$$

Но

$$xy = h^2 R_3 M_3,$$

а все другие величины на цилиндре постоянны, так что у нас

$$V' = \alpha_3 M_3,$$

и толщина соответствующего слоя

$$\zeta = \beta_3 l_0 M_3. \quad \text{ч. т. д.}$$

Следовательно, нам остается найти цилиндры, удовлетворяющие условию $(B.2.34)$. Тем самым мы найдем дискретную последовательность цилиндров, порождающих новые фигуры равновесия.

Мы будем называть их *цилиндрами бифуркации*. Поскольку цилиндры полностью определяются своим прямым сечением E_0, далее мы будем рассматривать только эти эллипсы, лежащие в прямом сечении, находя тем самым эллипсы бифуркации, которые задают интересующие нас цилиндры.

Итак, задача сводится к решению уравнения $(B.2.34)$, которое даст нам отношение осей искомого эллипса; сам эллипс мы найдем, записав условие о том, что его площадь должна принимать данное значение.

4. *Обсуждение уравнения*

$$\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_3 S_3}{2} = 0.$$

Рассмотрим более общее уравнение

$$\frac{R_k S_k}{n} - \frac{R_i S_i}{p} = 0. \qquad (B.2.35)$$

Если положить

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = t \quad (0 \leqslant t \leqslant 1 \text{ при } a^2 \leqslant \rho^2 < \infty),$$

то уравнение $(B.2.35)$ станет алгебраическим, рациональным относительно t. Пусть, далее,

$$\frac{\sqrt{\rho^2 - b^2} - \sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2} + \sqrt{\rho^2 - a^2}} = \frac{1-t}{1+t} = x \quad (0 \leqslant x \leqslant 1 \text{ при } a^2 \leqslant \rho^2 < \infty),$$

тогда у нас

$$\frac{R_i S_i}{p} = \frac{1 \pm x^p}{p},$$

где знак $+$ или $-$ выбирается в зависимости от того, четно i или нечетно. Тогда уравнение $(B.2.35)$ принимает вид

$$F = \frac{1 \pm x^p}{\rho} - \frac{1 \pm x^n}{n} = 0. \qquad (B.2.36)$$

Теперь мы можем сформулировать следующую теорему.

Теорема 5. *Для того чтобы уравнение $(B.2.35)$ имело единственный корень при $a^2 < \rho^2 < \infty$, необходимо и достаточно:* 1) *чтобы $p \neq n$ и* 2) *чтобы наименьший индекс (i) был нечетным, а наибольший индекс (k) — четным.*

Если $p = n$, то уравнение $(B.2.36)$ принимает вид $x^n \pm x^n = 0$, так что либо у него есть корень $x = 0$, либо оно тождественно обращается в нуль. Второе условие является достаточным, так как при его выполнении уравнение $(B.2.35)$ записывается в виде

$$nF = -\left(\frac{n}{p}x^p + x^n\right) + \frac{n}{p} - 1 = 0.$$

Но при $x = 0$

$$nF = \left(\frac{n}{\rho} - 1\right) > 0,$$

а при $x = 1$

$$nF = -2 < 0,$$

и, поскольку производная сохраняет знак (−), уравнение (B.2.35) имеет один и только один корень при $0 \leqslant x < 1$ или при $a^2 < \rho^2 < \infty$.

То же самое условие будет и необходимым. Действительно, если это условие выполняется, то возможны два случая: 1) i четно, а k нечетно, тогда у нас

$$nF = \left(\frac{n}{p}x^p + x^n\right) + \frac{n}{p} - 1 = 0,$$

и функция F больше нуля при всех значениях x от 0 до 1; 2) i и k одновременно четны или одновременно нечетны. В этом случае уравнение (B.2.35) записывается в виде

$$nF = \left(\frac{n}{p}x^p - x^n\right) \pm \left(\frac{n}{p} - 1\right) = 0.$$

Функция F больше или меньше нуля на всем интервале $(0\ldots1)$ в зависимости от того, выбираем мы знак (+) или (−), так что она обращается в нуль только при $x = 1$, если выбрать знак (−). Таким образом, у нее нет корней при $0 < x < 1$, и теорема доказана.

В нашем уравнении (B.2.34)

$$\frac{R_3S_3}{2} - \frac{R_kS_k}{n} = 0 \ (k > 3),$$

$i = 3$, то есть нечетно, поэтому у него есть единственный корень при условии, что k – четно. Следовательно, интересующие нас функции R и M имеют вид

$$R_k = f(\rho^2) \text{ или } R_k = \sqrt{\rho^2 - b^2}f(\rho^2), \quad M_k = \cos(nv),$$

а уравнение относительно x всегда записывается в форме

$$\frac{1 - x^2}{2} - \frac{1 + x^n}{n} = 0 \ (n > 2). \qquad (B.2.37)$$

Это уравнение можно упростить. При нечетном n разделить его на $1 + x$, после чего оно примет вид

$$-\frac{n-2}{2} + \frac{n-2}{2}x + x^2 - x^3 + \ldots + x^{n-1} = 0. \qquad (B.2.38)$$

Если n четно, то, полагая $x^2 = y$, $m = 2n$, мы получим

$$y^m + my - (m-1) = 0. \qquad (B.2.39)$$

Придавая n значениям $n = 3, 4, 5 \ldots$ и решая получающиеся уравнения, мы найдем последовательность эллипсов бифуркации. Соответствующая скорость ω задается по формуле $(B.2.30)$, которая имеет вид

$$\frac{\omega^2}{A} = \frac{4x}{a^2 - b^2} = \frac{4x}{R_2^2 - R_1^2}.$$

Подставляя сюда значение A и вводя значения t и x, получаем формулы

$$\frac{\omega^2}{\pi} = \frac{4t}{(1+t)^2} \text{ и } \frac{\omega^2}{\pi} = 1 - x^2; \qquad (B.2.40)$$

отсюда видно, что ω^2 возрастает по t (если $t < 1$) и убывает по t (если $t < 1$) и убывает по x.

Корни уравнения $(B.2.37)$ возрастают вместе с n, поскольку, рассматривая x как функцию от n, мы придем к соотношению

$$\frac{dx}{dn} = \frac{1 - x^2 - 2x^n \ln x}{2nx(1 + x^{n-2})} > 0.$$

В итоге можно сделать следующие выводы:

1. Сплющивание цилиндра и угловая скорость изменяются в противоположных направлениях, иначе говоря, чем больше скорость, тем меньше сплющивание;
2. Если скорость ω убывает, начиная со своего максимального значения, то жидкая масса последовательно проходит все фигуры бифуркации в порядке возрастания n.

ЗАМЕЧАНИЕ. Максимальная скорость ω соответствует значению $t = 1$, $x = 0$, то есть круговому цилиндру. Следовательно, круговой цилиндр никогда не сможет превратиться в эллиптический, так как для этого необходимо, чтобы ω достигла значения $\sqrt{\pi}$ и, не превосходя его, начала убывать. Поэтому фигура эллиптического цилиндра может возникать только у жидкости, которая в состоянии покоя находилась на бесконечной плоскости. Если эта жидкость начнет вращаться вокруг нормали к данной плоскости, мы получим эллипсоиды Маклорена; если, наоборот, она начнет вращаться вокруг оси, расположенной в той же самой плоскости, то при увеличении скорости мы получим все эллиптические цилиндры, начиная с самых сплющенных и заканчивая круговым.

5. *Неэллиптические фигуры равновесия.* Мы все время будем рассматривать прямое сечение E_0 нашего цилиндра. Как мы уже видели, какова бы ни была фигура бифуркации, слой, переводящий ее в новую фигуру равновесия, задается по формуле

$$\zeta = \beta_{2n} l_0 \cos(nv).$$

Легко видеть, что толщина слоя ζ не может обращаться в нуль на концах большой оси, то есть в точках $B(y = R_2)$ и $B'(y' = -R_2)$, и что при четном n знак ζ один и тот же в точках B и B', он больше или меньше нуля в зависимости от знака β_{2n}. Таким образом, у нас есть две различные фигуры, симметричные относительно оси OX. При нечетном n толщина слоя ζ принимает разные знаки в точках B и B'. Мы получим только одну фигуру, не симметричную относительно оси OX. Изменение знака β_{2n} не вызывает ничего, кроме поворота нашей фигуры вокруг ее центра на угол π.

Первый эллипс бифуркции получается при $n = 3$. Уравнение $(B.2.38)$ принимает вид

$$x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} = 0.$$

Его корни —

$$x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = -1.$$

Поэтому искомое значение x равно

$$x = \frac{1}{2}.$$

Отношение осей задается по формуле

$$x = \frac{1-t}{1+t} = \frac{1}{2}, \quad \text{откуда} \quad t = \frac{\sqrt{\rho^2 - a^2}}{\sqrt{\rho^2 - b^2}} = \frac{1}{3}.$$

Слой, который можно наложить на этот эллипс, имеет толщину

$$\zeta = \beta_6 l M_6 = \beta_6 l \cos(3v) = -\beta_6 l \sin(3\theta).$$

Мы видим, что функция ζ обращается в нуль в шести точках:

$$\theta = 0, \frac{1}{3}\pi, \frac{2}{3}\pi, \pi, \frac{4}{3}\pi, \frac{5}{3}\pi,$$

или

$$v = 0, \frac{1}{6}\pi, \frac{1}{2}\pi, \frac{5}{6}\pi, \frac{7}{6}\pi, \frac{3}{2}\pi, \frac{11}{6}\pi.$$

Замечая, что в точке $B(x = 0, y = R_2)$ $v = 0$ и $\cos 3v = 1$, видим, что в случае, когда β_6 больше нуля в точке B и на всем интервале

$$-\frac{1}{6}\pi < v < \frac{1}{6}\pi.$$

На других промежутках ζ меняет знак, и фигура будет выглядеть примерно так, как показано на рисунке 16.

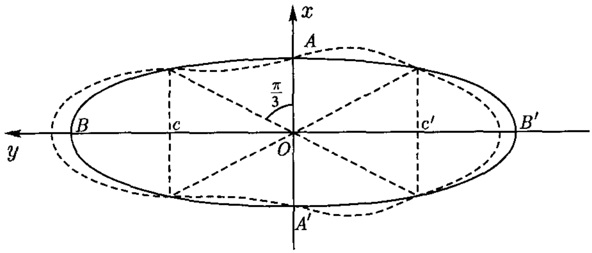


Рис. 16

Этот случай соответствует грушевидной фигуре Пуанкаре.

Полезно заметить, что l_0 изменяется на эллипсе от $(\rho^2 - b^2)^{-\frac{1}{2}}$ в точках A до $(\rho^2 - a^2)^{-\frac{1}{2}}$ в точках B. Эти значения относятся друг к другу как 1 к 3. Следовательно, ζ достигает максимума в точках B и B'.

Параметры этого первого эллипса бифуркации имеют вид

$$A = 3\pi, \quad OA = 1, \quad OB = 3, \quad OC = 1,5, \quad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{3}{8}$$

или же

$$A = \pi, \quad OA = \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad OB = \sqrt{3}, \quad OC = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \frac{\omega^2}{2\pi} = \frac{3}{8}.$$

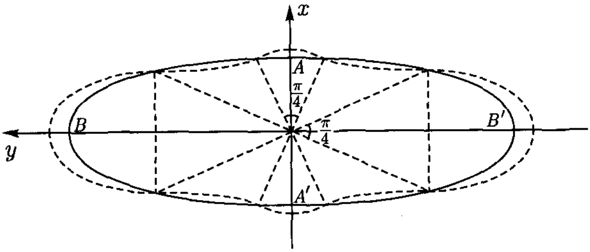


Рис. 17

Чтобы получить второй эллипс бифуркации, надо в уравнении (B.2.39) положить $n = 4$, $m = 2$. Тогда у нас

$$y^2 + 2y - 1 = 0.$$

Отсюда находим, что

$$y = -1 \pm \sqrt{2},$$

и, следовательно,

$$x = \sqrt{\sqrt{2} - 1} = 0{,}64, \qquad \frac{R_1}{R_2} = t = 0{,}22, \qquad \frac{\omega^2}{2\pi} = 0{,}295.$$

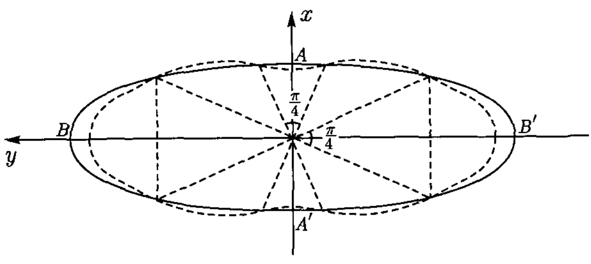


Рис. 18

Толщина слоя задается по формуле

$$\zeta = \beta_8 l \cos(4v),$$

так что функция ζ обращается в нуль в восьми точках

$$v = d\frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi, \frac{15}{8}\pi.$$

Если β_8 больше нуля, то ζ больше нуля в точках B и B', и мы получаем фигуру, изображенную на рисунке 17.

Если β_8 меньше нуля, то ζ тоже меньше нуля в точках B и B', и мы получаем фигуру, изображенную на рисунке 18.

И так далее.

Круговой цилиндр. Повторяя те же вычисления в случае кругового цилиндра, нетрудно увидеть, что условие $V' - g\zeta = \mathrm{const}$ в этом случае принимает форму

$$\sum_1^\infty \left[\frac{2\pi}{n} - (2\pi - \omega^2)\right] r_0^{n+1}(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) = \mathrm{const},$$

где A_n и B_n — коэффициенты разложения функции ζ в ряд Фурье:

$$\zeta = \sum_1^\infty r^n(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)) = \mathrm{const}.$$

Следовательно, уравнение, определяющее скорость ω, соответствующую цилиндру бифуркации, имеет вид

$$\frac{2\pi}{n} - (2\pi - \omega^2) = 0 \text{ или } \frac{\omega^2}{2\pi} = 1 - \frac{1}{n} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Поэтому значения $\dfrac{\omega^2}{2\pi}$, соответствующие цилиндрам бифуркации, равны

$$\frac{\omega^2}{2\pi} = 0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \ldots \quad \text{при } n = 1, 2, 3, 4, \ldots \infty.$$

Тогда толщина слоя, определяющего новую фигуру, задается по формуле

$$\zeta = \beta_n \cos n\theta.$$

Мы получим первый цилиндр бифуркации при $n = 2$, $\omega^2_\cdot = \pi$. Этот цилиндр, впрочем, как мы уже видели, приводит к появлению эллиптических цилиндров.

6. *Устойчивость.* Рассмотрим вращающийся эллиптический цилиндр, находящийся в состоянии относительного равновесия. Пусть V_0 — его потенциал на поверхности. Тогда в произвольной точке, расстояние от которой до цилиндра равно λ (и бесконечно мало), этот потенциал равен

$$V = V_0 - g\lambda.$$

Предположим, что цилиндр деформировали, и вычислим энергию деформированной фигуры. Пусть ζ — толщина слоя, производящего деформацию, $d\mu$ — элемент его объема, а V' — его потенциал на поверхности.

Полная энергия состоит из двух частей:

1) энергия, соответствующая силе притяжения;

2) энергия, соответствующая центробежной силе;

Обозначим через dm элемент объема цилиндра, а через r — расстояние до оси OZ. Тогда полная энергия будет равна

$$W = \frac{1}{2}\int V\,dm + \int V\,d\mu + \frac{1}{2}\int V'\,d\mu + \int \frac{\omega^2 r^2}{2}\,dm + \int \frac{\omega^2 r^2}{2}\,d\mu.$$

Но энергия системы до деформации имела вид

$$W_0 = \frac{1}{2}\int V\,dm + \frac{1}{2}\int \omega^2 r^2\,dm,$$

кроме того, величиной $\rho\frac{\omega^2 r^2}{2}\,d\mu$ можно пренебречь, так как полная масса слоя равна нулю. Установив все это, получаем

$$W = W_0 + \int V d\mu + \frac{1}{2}\int V' d\mu = W_0 + \int \left(V + \frac{V'}{2}\right) d\mu.$$

Но $V = V_0 - g\lambda$, следовательно,

$$\int V\,d\mu = \int V_0\,d\mu - \int g\lambda\,d\mu = -\int g\lambda\,d\mu.$$

Пусть $d\omega$ — элемент поверхности, заключенный между двумя бесконечно близкими образующими. Тогда $d\mu = d\lambda d\omega$, и мы получаем

$$\int V\,d\mu = -\iint g\lambda\,d\lambda\,d\omega = -\int g\,d\omega \int\limits_0^{\zeta} \lambda\,d\lambda = -\int g\frac{\zeta^2}{2}\,d\omega$$

и, точно так же,

$$\frac{1}{2}\int V' d\mu = \int \frac{V'\zeta}{2}\,d\omega.$$

Записывая

$$\zeta = \sum A_i l M_i,$$

находим

$$V' = \sum \frac{2\pi}{n} A_i R_i^0 S_i^0 M_i.$$

и, далее,

$$\frac{\zeta^2}{2} = \sum_i \frac{A_i^2}{2} l^2 M_i^2 + \sum_i k A_i A_k l^2 M_i M_k,$$

$$\frac{V'\zeta}{2} = \sum \frac{\pi}{n} A_i^2 l S_i^0 R_i^0 M_i^2 + \sum \frac{\pi}{n} A_i A_k R_i^0 S_i^0 l M_i M_k.$$

Учитывая, что $\int l M_i M_k \, d\omega = 0$ и $gl = \pi R_3^0 S_3^0$, приходим к соотношению

$$W = W_0 - \pi \sum A_i^2 \left(\frac{S_3^0 R_3^0}{2} - \frac{R_i^0 S_i^0}{n} \right) \int l M_i^2 \, d\omega.$$

Мы можем считать, что новая поверхность определяется коэффициентами A_i, тогда коэффициенты устойчивости имеют вид

$$-\pi \left(\frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_i S_i}{n} \right) \int l M_i^2 \, d\omega.$$

Поскольку данный интеграл всегда больше нуля, необходимым и достаточным условием устойчивости фигуры будет

$$\frac{R_3 S_3}{2} - \frac{R_i S_i}{n} > 0 \ (i = 1, 2, 3, \ldots \infty). \qquad (B.2.41)$$

Записывая это условие в форме

$$\frac{1 - x^2}{2} - \frac{1 \pm x^n}{n} > 0,$$

видим, что оно не выполняется при $i = 1$, $i = 2$ и $i = 4$, каково бы ни было x, а при $i > 0$, то есть при $n > 2$, оно будет выполняться, если значение x не превосходит $\frac{1}{2}$. При $x > \frac{1}{2}$ найдется по меньшей мере одно значение $i > 4$, при котором условие $(B.2.41)$ не выполняется. Деформация, соответствующая $i = 1$ или $i = 2$,— это не что иное, как перенос, параллельный одной из осей координат. Что касается деформации, соответствующей $i = 4$, то при ней толщина слоя будет равна

$$\zeta = \beta_4 l M_4 = \beta_4 l \cos(2v).$$

Такая деформация усиливает сплющивание цилиндра.

Следовательно, все эллиптические цилиндры неустойчивы, но при $x < \frac{1}{2}$ степень неустойчивости равна 1. Цилиндр будет устойчив при любой деформации, которая не увеличивает его сплющивание. При $x > \frac{1}{2}$ степень неустойчивости превосходит 1.

Для круговых цилиндров условие (B.2.41) следует заменить на неравенства

$$1 - \frac{1}{n} - \frac{\omega^2}{2\pi} > 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если ω^2 не превосходит π, то это условие будет выполняться при $n > 1$. Но деформация, соответствующая $n = 1$, представляет собой параллельный перенос по направлению, перпендикулярному оси вращения, и не изменяет форму кругового цилиндра. Следовательно, все круговые цилиндры устойчивы при любой угловой скорости ω, лишь бы она не превышала значения $\sqrt{\pi}$. Для угловой скорости, которая превосходит $\sqrt{\pi}$, равновесие будет неустойчивым, причем степень неустойчивости будет тем больше, чем больше ω.

Замечание 1. Условия устойчивости не изменяется, если, вслед за Пуанкаре, мы примем критерий устойчивости, состоящий в том, что разность $W - \omega^2 I$ достигает максимума, так как, произведя вычисления, мы полностью пренебрегали моментом инерции слоя.

Замечание 2. Результаты также не изменятся, если при постановке задачи мы будем действовать в условиях так называемой *естественной задачи*, по терминологии Пуанкаре, то есть если мы будем считать скорость ω переменной, а момент вращения $\mu = \omega^2 I$ постоянным. Тогда мы получим формулу

$$\omega^2 = k\mu \frac{t^2}{(1+t^2)^2}$$

(здесь k — константа), совершенно аналогичную формуле (B.2.40)

$$\omega^2 = 4\pi \frac{t}{(1+t)^2}.$$

Подводя итоги, представим наши результаты графически (см. Poincare, Figures d'equilibve d'une masse fluide en rotation). Мы будем откладывать на одной из осей координат отношение t осей цилиндра, а на другой — величину $\frac{\omega^2}{2\pi}$.

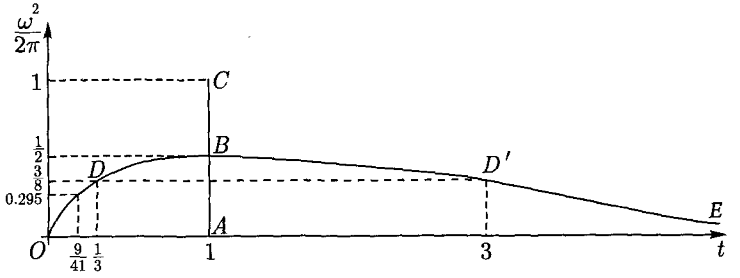


Рис. 19

Прямая ABC соответствует круговым цилиндрам, а кривая ODB — всем эллиптическим. Кривая $BD'E$ задает те же самые цилиндры, но повернутые на угол $\frac{\pi}{2}$. Некоторые точки бифуркации отмечены крестиками.

Поскольку круговые цилиндры устойчивы на участке AB, они будут неустойчивы на участке BC точно так же, как и эллиптические цилиндры на участке $ODBE$. Точка D представляет собой точку бифуркации, в которой возникают цилиндры, аналогичные грушевидным фигурам. Кривая, соответствующая этим цилиндрам, должна касаться дуги ODB в точке D, не пересекая ее, и мы ничего не можем сказать об устойчивости этих фигур. Вероятнее всего, они неустойчивы, хотя Джинс (см. введение) верил в обратное. Однако он верил и в устойчивость эллиптических цилиндров, хотя, как мы только что убедились, это не так.

Приложение С

Устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра

А. В. Борисов, И. С. Мамаев, Т. Б. Иванова

С.1. Введение

Работа посвящена исследованию устойчивости (по части переменных) фигур относительного равновесия жидких самогравитирующих масс (жидкость идеальная несжимаемая). Эта задача имеет более чем трехсотлетнюю историю (см., например, историческое введение в [21]), тем не менее, в последнее время, в связи с появлением быстродействующих компьютеров и возможностью компьютерного эксперимента, в этих исследованиях открылись новые перспективы. Однако трехмерная задача, к классическим результатам которой относятся эллипсоиды Маклорена и Якоби, является достаточно сложной как для моделирования, так и с точки зрения наглядности представления результатов (см., например, [2]). С другой стороны, известна модельная (не связанная непосредственно с вопросами космогонии) задача о фигурах равновесия бесконечной однородной массы цилиндрической формы, вращающейся с заданным моментом вокруг оси цилиндра. В 1859 году Л. Матиссен [6] нашел, что бесконечный цилиндр с эллиптическим сечением является фигурой равновесия. Данная задача является упрощенной формой общей проблемы определения фигур равновесия вращающейся жидкости, так как достаточно рассматривать плоское сечение. Также в работе [6] впервые приведена начальная классификация фигур равновесия и приведено выражение для потенциала бесконечного эллиптического цилиндра. В работе Дирихле [1] было получено решение, описывающее пульсации жидкого эллипсоида. В дальнейшем частный случай решения Дирихле для случая эллиптического цилиндра был получен Липшицем [7], который проинтегрировал данную систему в квадратурах. С использованием несколько иного подхода аналогичные результаты были также получены в работах Лава [8] и Хикса [4].

Подробно задача о существовании и устойчивости плоских фигур равновесия без внутреннего течения, отличных от эллипса, была исследована в работах Джинса [5] и Глоба-Михайленко [3]. В частности, в работе [5] указаны точки бифуркации (в смысле Пуанкаре) кругового цилиндра, в работе [3] указаны точки бифуркации для семейства эллипсов (без внутренних течений) и приближенно построены фигуры, близкие к эллиптическим. Других широко известных классических работ по данной тематике практически нет. Интересно, что Ляпунов, например, отнес эту задачу к математическим «курьезам». Чандрасекхар [21], рассматривая динамику жидких эллипсоидов с применением вириального метода, также не рассматривал двумерный случай.

С другой стороны, двумерная задача гораздо проще с точки зрения анализа устойчивости и поиска точек бифуркации, а также для моделирования динамики эллиптического цилиндра компьютерными методами. Это позволяет апробировать на данной задаче различные методы анализа, которые впоследствии могут использоваться в трехмерной системе. В работе [16] приведен численный метод поиска новых двумерных фигур равновесия. Численным продолжением по параметру были получены фигуры равновесия, которые ответвляются от кругового цилиндра при возмущении различными гармониками.

В данной работе мы исследуем возможные фигуры равновесия и устойчивость жидкого самогравитирующего эллиптического цилиндра с внутренним полем скоростей. При этом внутренний момент (завихренность) и полный момент импульса направлены вдоль оси цилиндра. Отметим, что эта задача является более естественной с физической точки зрения (по сравнению со случаем без внутренних течений), так как с потерей устойчивости естественно ожидать появление внутренних течений во вновь образовавшихся фигурах.

С.2. Гамильтоново представление и интегралы движения

Рассмотрим жидкий самогравитирующий неограниченный эллиптический цилиндр постоянной плотности ρ, уравнение поверхности которого

$$\frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} = 1, \qquad (C.2.1)$$

где предполагаем $a_1 \geqslant a_2$.

Гравитационный потенциал V однородной массы, ограниченной поверхностью (C.2.1), во внутренних точках с координатами (x_1, x_2) удовлетворяет уравнению Пуассона $\triangle V = 4\pi G\rho$ и может быть получен предельным переходом из выражения для эллипсоида, когда одна из осей стремится к бесконечности [10, 18]:

$$V = -G\pi\rho a_1 a_2 \lim_{a_3\to\infty} \int\limits_0^\infty \left(1 - \sum_{i=1}^{3} \frac{x_i^2}{a_i^2+\lambda}\right) \frac{a_3}{\triangle}\, d\lambda, \tag{C.2.2}$$

где $\triangle = \sqrt{(a_1^2+\lambda)(a_2^2+\lambda)(a_3^2+\lambda)}$, G — гравитационная постоянная. Элементарное интегрирование дает:

$$V = 2G\pi\rho a_1 a_2 \left(U_0(a_3) + \frac{2x_1^2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{2x_2^2}{a_2(a_1+a_2)}\right), \tag{C.2.3}$$

где постоянная $U_0(a_3) \to \infty$ ($a_3 \to \infty$ — высота цилиндра), но не дает вклада в уравнения движения и может быть опущена.

Для трехосного эллипсоида потенциальная энергия U всей массы задается с помощью объемного интеграла:

$$U = -\frac{1}{2}\int V\rho\, dx_1\, dx_2\, dx_3 = -\frac{8}{15}G(\pi\rho a_1 a_2 a_3)^2 \int\limits_0^\infty \frac{d\lambda}{\triangle}. \tag{C.2.4}$$

Устремляя $a_3 \to \infty$, получим потенциальную энергию на единицу длины для эллиптического цилиндра [7]:

$$U(a_1, a_2) = 4Gm^2 \ln \frac{a_1+a_2}{2}, \tag{C.2.5}$$

где $m = \rho\pi a_1 a_2$ — масса на единицу длины цилиндра.

Жидкий цилиндр — система с бесконечным числом степеней свободы, однако уравнения Лагранжа–Эйлера допускают частное решение, которое описывается конечным числом динамических переменных и линейно зависит от начальных условий [1] (современное изложение см. в [2, 14]):

$$\boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}_0, t) = \mathbf{F}(t)\times_0, \quad \det \mathbf{F}(t) = 1, \tag{C.2.6}$$

где $\boldsymbol{x}_0 = (x_1^0, x_2^0)$ — вектор начальных положений частиц, $\mathbf{F}(t)$ — матрица динамических переменных.

В качестве обобщенных координат удобно выбрать полуось эллипса сечения (учитывая сохранение массы $a_1 a_2 = \mathrm{const}$), φ — угол поворота цилиндра вокруг своей оси как целого в неподвижной системе координат и ψ — угол, описывающий внутреннее движение относительно главных осей цилиндра. Тогда

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\psi & \sin -\psi \\ \sin\psi & \cos\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1^0 & 0 \\ 0 & a_2^0 \end{pmatrix}^{-1}, \qquad (C.2.7)$$

где a_1^0, a_2^0 — главные полуоси в начальный момент, φ и ψ отсчитываются в одном направлении.

Эволюция системы в представлении (C.2.7) с потенциалом (C.2.3) описывается уравнениями Римана [9]. Вследствие того, что динамика жидкости подчиняется принципу Гамильтона, решение описывается канонической системой с тремя степенями свободы следующим образом (см. например, [14], где приведена также подробная библиография).

Вычисляя кинетическую энергию жидкости с учетом (C.2.6) и (C.2.7), получим:

$$T = \frac{m}{2}\left(\dot a_1^2 + \dot a_2^2 + (a_1\dot\varphi - a_2\dot\psi)^2 + (a_2\dot\varphi - a_1\dot\psi)^2\right). \qquad (C.2.8)$$

Выберем единицу измерения длины так, чтобы радиус эквивалентного кругового цилиндра был равен единице: $a_1 a_2 = \widetilde a_1 \widetilde a_2 r_0^2 = r_0^2$, где $\widetilde a_1, \widetilde a_2$ — безразмерные полуоси, масштаб энергии $E_0 = \pi\rho r_0^2$. Для краткости обозначим $\widetilde a_1 = a$, из условия сохранения массы с учетом выбора единицы измерения длины получим $\widetilde a_2 = 1/a$. Тогда функция Лагранжа будет иметь вид

$$L = \frac{\dot a^2}{2}\left(1 + \frac{1}{a^4}\right) + \frac{1}{2}\left(a\dot\varphi - \frac{1}{a}\dot\psi\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}\dot\varphi - a\dot\psi\right)^2 - 2\omega_0^2 \ln\frac{a + 1/a}{2}, \qquad (C.2.9)$$

где $\omega_0^2 = 2\pi\rho G$.

Переменные φ, ψ являются циклическими, следовательно, имеется два интеграла движения:

$$p_\varphi = \frac{\partial L}{\partial\dot\varphi} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\dot\varphi - 2\dot\psi, \quad p_\psi = \frac{\partial L}{\partial\dot\psi} = \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\dot\psi - 2\dot\varphi. \quad (C.2.10)$$

С точностью до постоянного множителя p_ψ совпадает с завихренностью Γ (масштаб $\Gamma_0 = r_0^2\sqrt{\pi^3\rho G}$), p_φ — момент импульса на единицу длины M (масштаб $M_0 = r_0^4\sqrt{\pi^3\rho^3 G}$):

$$\Gamma = \int\left(\frac{\partial\dot y}{\partial x} - \frac{\partial\dot x}{\partial y}\right)dx\,dy = 2p_\psi, \quad M = \rho\int(x\dot y - y\dot x)\,dx\,dy = -\frac{p_\varphi}{2}.$$

Определенные таким образом момент и завихренность направлены в одну сторону.

Функция Гамильтона определяется преобразованием Лежандра:

$$H = p_\varphi\dot\varphi + p_\psi\dot\psi + p_a\dot a - L,$$

где $p_a = \partial L/\partial\dot a = \dot a$.

С учетом (C.2.10), окончательно имеем:

$$H = \frac{p_a^2}{2(1+1/a^4)} + U_r, \quad U_r = \frac{c_1^2}{(a-1/a)^2} + \frac{c_2^2}{(a+1/a)^2} + 2\omega_0^2\ln\frac{a+1/a}{2}, \tag{C.2.11}$$

где U_r — приведенная потенциальная энергия, c_1, c_2 — фиксированные константы первых интегралов:

$$c_1 = \frac{p_\varphi + p_\psi}{2} = \frac{\Gamma}{4} - M, \; c_2 = \frac{p_\varphi - p_\psi}{2} = -\frac{\Gamma}{4} - M. \tag{C.2.12}$$

Таким образом, эволюция полуосей эллипса для решения (C.2.6) описывается гамильтоновой системой с одной степенью свободы, гамильтониан которой параметрически зависит от величин интегралов момента и завихренности. Если известно решение $a(t)$ системы (C.2.11), то эволюция углов $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ получается с помощью независимых квадратур:

$$\dot\varphi = \frac{c_1 + c_2}{(a-1/a)^2}, \quad \dot\psi = \frac{c_1 - c_2}{(a-1/a)^2}. \tag{C.2.13}$$

С.3. Стационарные решения и бифуркационная диаграмма

Стационарные состояния, для которых полуоси эллипса не меняются, соответствуют неподвижным точкам системы (C.2.11), которые определяются уравнениями

$$\dot a = \frac{\partial H}{\partial p_a} = 0, \; \dot p_a = -\frac{\partial H}{\partial a} = 0. \tag{C.3.1}$$

Из первого уравнения находим $p_a = 0$, следовательно, стационарные состояния определяются критическими точками приведенного потенциала U_r, т. е. уравнением

$$-\frac{c_1^2(a+1/a)}{(a-1/a)^3} - \frac{c_2^2(a-1/a)}{(a+1/a)^3} + \frac{\omega_0^2(a-1/a)}{(a+1/a)} = 0. \qquad (C.3.2)$$

Вследствие симметрии уравнения $(C.3.2)$ относительно замены $a \to \to 1/a$, достаточно рассмотреть его решения на интервале $a \in [1, +\infty)$. Поэтому сделаем однозначную на данном интервале замену

$$u = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2, \qquad (C.3.3)$$

где $u \in [4, +\infty)$. Приведенная потенциальная энергия $(C.2.11)$ после замены $(C.3.3)$ имеет вид

$$U_r = \omega_0^2 \ln\frac{u}{4} + \frac{c_1^2}{u-4} + \frac{c_2^2}{u}. \qquad (C.3.4)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. После замены $(C.3.3)$ гамильтониан $(C.2.11)$ представляется в виде

$$H = \frac{2u(u-4)}{u-2}p_u^2 + U_r(u),$$

где $p_u = \dfrac{\partial L}{\partial \dot{u}} = \dfrac{u-2}{2u(u-4)}\dot{u}$.

Подставляя $(C.3.3)$ в $(C.3.2)$, находим уравнение, определяющее неподвижные точки:

$$f(u) = \omega_0^2 u^3 - (8\omega_0^2 + c_1^2 + c_2^2)u^2 + 8(2\omega_0^2 + c_2^2)u - 16c_2^2 = 0. \qquad (C.3.5)$$

Отметим сходство этого уравнения с уравнением, определяющим регулярные прецессии осесимметричного волчка (случай Лагранжа), при этом $f(u)$ аналогична гироскопической функции волчка, которая также является полиномом третьей степени [12]. Аналогия между движением волчка Лагранжа и динамикой жидкого эллиптического цилиндра позволяет применить сходный подход к анализу устойчивости эллиптических стационарных движений.

Чтобы найти число корней $(C.3.5)$ при различных значениях c_1, c_2 на интервале $u \geqslant 4$, вычислим на его границе значение функции $f(u)$ и ее производной:

$$f|_{u=4} = -16c_1^2 < 0, \quad f'|_{u=4} = -8c_1^2 < 0.$$

Используя дополнительно, что коэффициент при u^3 положительный, заключаем, что если $c_1 \neq 0$, при $u > 4$ всегда имеется лишь один корень, который обозначим u_*.

Таким образом,

- в данном случае при $c_1 \neq 0$ имеется одно (с точностью до замены $a \to 1/a$) двухпараметрическое семейство критических точек $u_*(c_1, c_2)$, которым соответствуют эллиптические цилиндры, сохраняющие форму;
- кроме того, при $c_1 = 0$ всегда имеется критическая точка $u = 4$, соответствующая круговому цилиндру (условия существования эллиптического стационарного решения при $c_1 = 0$ подробнее исследуются ниже).

Согласно (C.2.11), тип движения (вид траектории в конфигурационном пространстве) эллиптического цилиндра полностью определяется значением первых интегралов c_1, c_2, H. В связи с этим рассмотрим трехмерное пространство, точками которого являются значения первых интегралов (c_1, c_2, H). Стационарные решения $u_*(c_1, c_2)$ определяют в этом пространстве двумерную бифуркационную поверхность

$$H = h(c_1, c_2) = H|_{p_a=0, a=a_*} = U_r(u_*(c_1, c_2), c_1, c_2), \qquad (C.3.6)$$

где a_* получается обращением соотношения $u_* = \left(a_* + \dfrac{1}{a_*}\right)^2$. Эта поверхность отделяет область возможных значений интегралов от тех значений, при которых движение невозможно. При этом область возможных значений энергии при фиксированных c_1, c_2 определяется неравенством $H \geqslant h(c_1, c_2)$.

Стационарные решения, отвечающие круговому цилиндру ($u_* = 4$), в пространстве первых интегралов c_1, c_2, H определяют бифуркационную кривую (параболу), заданную уравнениями

$$c_1 = 0, \ H_{cir} = \frac{1}{4}c_2^2. \qquad (C.3.7)$$

Бифуркационная поверхность (C.3.6) и бифуркационная кривая (C.3.7) совместно с отмеченной областью возможных значений интегралов образуют полную бифуркационную диаграмму системы, общий вид которой и различные сечения приведены на рис. 20, 21.

Рассмотрим более подробно решение, соответствующее круговому цилиндру, и определим точки бифуркации в классе эллиптических цилиндров.

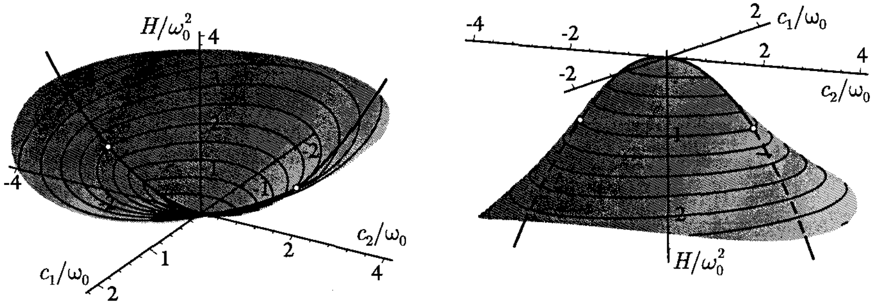


Рис. 20. Бифуркационная диаграмма эллиптического цилиндра в пространстве интегралов c_1, c_2, H

Этому решению соответствует линия минимума бифуркационной диаграммы (рис. 20) — ребро на плоскости $c_1 = 0$, к которому при $|c_2| < 2\omega_0$ примыкает кривая, определяющая соответствующее круговое решение (C.3.7). При $|c_2| > 2\omega_0$ эта кривая располагается внутри поверхности (критическое значение $c_2 = \pm 2\omega_0$ определяется из уравнения (C.3.5) при $c_1 = 0, u_* = 4$).

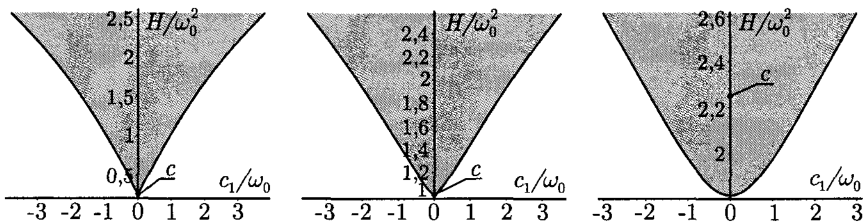


Рис. 21. Сечение поверхности (C.3.6) плоскостями $c_2 = \mathrm{const}$. Серым цветом выделена область возможных значений интегралов движения. Выделенная точка C соответствует $u = 4$ (круговому цилиндру)

Уравнение бифуркационной кривой, соответствующей круговому цилиндру и получающейся сечением поверхности (на рис. 20) плоскостью $c_1 = 0$, может быть определено явно исключением переменной u как параметра из уравнений (C.3.4), (C.3.5) при $c_1 = 0$:

$$H_{ell}(c_2) = \omega_0^2 \left(1 + \ln \frac{c_2^2}{4\omega_0^2}\right). \qquad (C.3.8)$$

Соответствующие зависимости энергии кругового цилиндра H_{cir} (C.3.7) (парабола) и эллиптического цилиндра H_{ell} (C.3.8) представлены на рис. 22.

Точка ответвления

$$c_2 = \pm 2\omega_0, \ H = \omega_0^2 \qquad (C.3.9)$$

является точкой бифуркации, в которой решение, соответствующее круговому цилиндру, меняет свой тип с *центра* на *фокус*, то есть при $|c_2| < 2\omega_0$ устойчивым является круговой цилиндр, при $|c_2| > 2\omega_0$ — эллиптический.

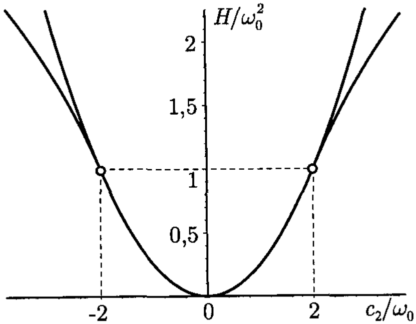


Рис. 22. Сечение бифуркационной диаграммы (C.3.6) плоскостью $c_1 = 0$. В выделенных точках происходит ответвление бифуркационной кривой (C.3.7) от поверхности (C.3.6)

При $c_1 = 0, u = 4$ интегралы движения (C.2.10) перестают быть независимыми и определяют одинаковое вращение с угловой скоростью $\omega = \dot{\varphi} - \dot{\psi}$. Для определения этой угловой скорости представим уравнение (C.3.5) в виде

$$\omega^2 u + 4\omega_0^2 = 0, \qquad (C.3.10)$$

откуда при $u = 4$ получим угловую скорость, соответствующую точке бифуркации:

$$\omega^2 = \omega_0^2 = 2\pi G\rho. \qquad (C.3.11)$$

Замечание 4. Бифуркационную поверхность (C.3.7) удобнее строить в параметрической форме $c_1(\eta, \xi)$, $c_2(\eta, \xi)$, $H(\eta, \xi)$. Для этого из уравнения (C.3.5) определим c_1:

$$c_1 = \pm \frac{(u-4)\sqrt{\omega_0^2 u - c_2^2}}{u}. \qquad (C.3.12)$$

Подставляя в (C.3.6), находим

$$\frac{c_1}{\omega_0} = \pm \frac{(\xi - 4)\sqrt{\xi - \eta^2}}{\xi}, \quad \frac{c_2}{\omega_0} = \eta, \quad \frac{H}{\omega_0^2} = \ln\frac{\xi}{4} + \frac{\eta^2}{\xi} + \frac{(\xi - \eta^2)(\xi - 4)}{\xi^2}. \qquad (C.3.13)$$

При этом область возможных значений параметров (изображена серым цветом на рис. 23) определяется системой неравенств

$$\xi \geqslant 4, \quad \xi - \eta^2 \geqslant 0.$$

При каждом фиксированном η существует $\xi_{\min}$, начиная с которого существует стационарное решение.

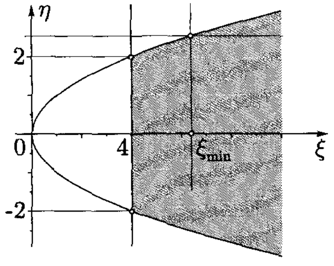


Рис. 23. Область возможных значений параметров, определяющих бифуркационную поверхность $(C.3.6)$

C.4. Устойчивость стационарных решений

Рассмотрим теперь проблему устойчивости стационарных решений, найденных выше, в классе возмущений, при которых цилиндр остается эллиптическим и течение описывается соотношением $(C.3.5)$ (другими словами, в классе эллиптических возмущений). Как известно [20], это устойчивость по части переменных, в данном случае — устойчивость по переменным a, φ, ψ. Более того, принимая во внимание, что внутреннее течение, описываемое углом ψ, достаточно сложно измерить при внешнем наблюдении за эллиптическим цилиндром, мы ограничимся лишь исследованием *орбитальной устойчивости по отношению к возмущению переменных* a, φ. В этом случае, согласно $(C.2.11)$, эволюция переменных описывается интегрируемой гамильтоновой системой с двумя степенями свободы, гамильтониан которой параметрически зависит от величины интеграла циркуляции $p_\psi = \dfrac{\Gamma}{4}$:

$$H_{p_\psi}(a, p_a, \varphi, p_\varphi) = \frac{p_a^2}{2(1 + 1/a^4)} + \\ + \frac{(p_\varphi + p_\psi)^2}{4(a - 1/a)^2} + \frac{(p_\varphi - p_\psi)^2}{4(a + 1/a)^2} + 2\omega_0^2 \ln \frac{a + 1/a}{2}. \qquad (C.4.1)$$

При этом стационарные решения (C.3.5) являются *критическими периодическими решениями* системы (C.4.1) (т. е. такими решениями, на которых интегралы p_φ и H зависимы).

Согласно работе [13], для анализа критических периодических решений интегрируемой двустепенной гамильтоновой системы необходимо построить ее *бифуркационный комплекс*, при этом критические периодические решения являются устойчивыми тогда и только тогда, когда они лежат на краю бифуркационного комплекса.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Бифуркационный комплекс строится из бифуркационной диаграммы путем склеивания различных листов, соответствующих различным компонентам связности интегральных многообразий (торов), т. е. в данном случае

$$M_{h,c_\varphi} = \{(a, p_a, \varphi, p_\varphi) \colon H = h, p_\varphi = c_\varphi\}.$$

Бифуркационная диаграмма системы (C.4.1) строится на плоскости первых интегралов p_φ, H при некоторой фиксированной величине циркуляции $p_\psi = \dfrac{\Gamma}{4}$. Очевидно, что эти диаграммы являются сечением общей бифуркационной диаграммы в пространстве c_1, c_2, H (см. рис. 20) вертикальными плоскостями вида

$$c_1 - c_2 = p_\psi = \text{const}. \qquad (C.4.2)$$

В зависимости от величины p_ψ они имеют различный тип (рис. 24).

В данном случае каждой точке в области возможных значений интегралов (отмечены серым цветом на рис. 24) соответствует лишь одно интегральное многообразие M_{h,c_φ}. Поэтому бифуркационный комплекс системы (C.4.1) состоит из единственного листа, который совпадает с частью плоскости p_φ, H, соответствующей возможным значениям первых интегралов (отмеченной серым цветом на рис. 24).

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для всякого возможного значения интегралов p_φ, H, лежащих на границе, за исключением точки C (рис. 24), соответствующей фокусу, интегральное многообразие M_{h,c_φ} является инвариантным тором (тор Лиувилля). Точке C соответствует особое инвариантное многообразие M_{h,c_φ}, состоящее из особой точки типа фокус–фокус и примыкающего к нему многообразия, заполненного асимптотическими к фокусу траекториями.

Теорема 6. 1. *Эллиптическое стационарное решение всегда устойчиво по отношению к возмущению переменных a, φ.*

2. *Стационарное решение, соответствующее круговому цилиндру, согласно (C.3.7), (C.3.9), (C.4.2), устойчиво по отношению к возмущению*

переменных a, φ при

$$|p_\psi| < 2\omega_0$$

и неустойчиво при

$$|p_\psi| > 2\omega_0.$$

Результаты об устойчивости критических периодических решений двухстепенной гамильтоновой системы, лежащих на краю бифуркационной диаграммы (комплекса), могут быть естественным образом обобщены на случай трех степеней свободы. В данном случае можно показать, что вследствие того, что все эллиптические решения соответствуют бифуркационной поверхности, расположенной на краю, они являются устойчивыми по всем переменным a, φ, ψ.

C.5. Круговой цилиндр и аналоги эллипсоидов Якоби и Дедекинда

В работах Джинса [5], Глоба-Михайленко [3] и Лихтенштейна [19] исследуется проблема существования фигур равновесия без внутренних течений, близких к круговому и эллиптическому цилиндру. В них, в частности, показано, что при угловой скорости вращения ω кругового цилиндра, удовлетворяющей условию

$$\omega^2 = \frac{\omega_0^2}{2}, \qquad (C.5.1)$$

от кругового цилиндра «ответвляется» эллиптическое стационарное решение без внутреннего течения — аналог эллипсоида Якоби. Кроме того, делается замечание о неустойчивости кругового цилиндра при $\omega^2 > \dfrac{\omega_0^2}{2}$ по от-

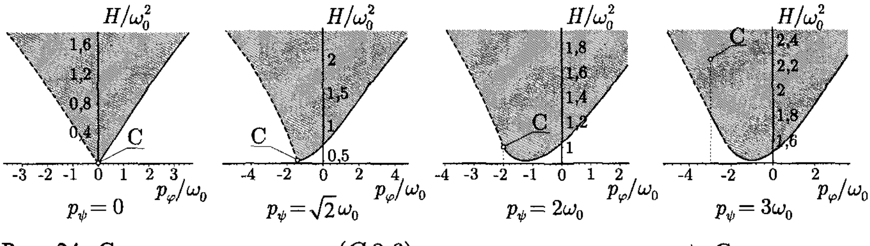


Рис. 24. Сечение поверхности (C.3.6) плоскостями $p_\psi = \mathrm{const}$. Серым цветом выделена область возможных значений интегралов движения. Выделенная точка соответствует $u = 4$ (круговому цилиндру), для которого $c_1 = 0$, т. е. $p_\varphi = -p_\psi$

ношению к эллипсоидальным возмущениям, в связи с тем, что энергия соответствующего эллиптического решения меньше. Обсудим эти результаты с точки зрения нашего анализа.

Если внутреннего течения нет (т.е. $\dot{\psi} = 0$, цилиндр вращается как твердое тело), приведенная потенциальная энергия (C.3.4) принимает вид

$$U_r = \omega_0^2 \ln \frac{u}{4} + \frac{p_\varphi^2}{2(u-2)},$$

где p_φ — интеграл движения, связанный с угловой скоростью вращения цилиндра $\omega = \dot{\varphi}$ следующим образом:

$$p_\varphi = (u-2)\omega. \tag{C.5.2}$$

Эллиптические стационарные состояния, отвечающие минимуму приведенной потенциальной энергии U_r, соответствуют неподвижным точкам, которые определяются уравнениями (C.3.1):

$$p_\varphi^2 u - 2\omega_0^2 (u-2)^2 = 0. \tag{C.5.3}$$

Из (C.5.2)–(C.5.3) находим угловую скорость вращения эллиптического цилиндра (двумерного аналога эллипсоида Якоби (C.5.1)) и энергию в точке «бифуркации»:

$$\omega^2 = \left.\frac{2\omega_0^2}{u}\right|_{u=4} = \frac{\omega_0^2}{2}, \ H = \frac{\omega_0^2}{2}.$$

Кроме того, легко показать, что аналогичный результат получится для двумерного аналога эллипсоидов Дедекинда ($\dot{\varphi} = 0, \dot{\psi} \neq 0$).

Этим цилиндрам *соответствуют выделенные кривые* бифуркационной диаграммы (рис. 20). На рис. 25 представлена проекция этих кривых на плоскость (c_1, c_2). Точки ответвления A_1, A_2 соответствуют критическим значениям

$$c_1 = 0, \quad c_2 = \pm\sqrt{2}\omega_0.$$

Также на рис. 25 выделены точки B_1, B_2, которые являются точками бифуркации цилиндра с внутренним течением (C.3.11).

Как видно из этого рисунка (см. также рис. 24), потери устойчивости кругового цилиндра по отношению к эллиптическим возмущениям в точках A_1, A_2 $\left(\text{т. е. при } \omega^2 > \dfrac{\omega_0^2}{2}\right)$ не происходит, это происходит в точках B_1, B_2 (т. е. при $\omega^2 > \omega_0^2$).

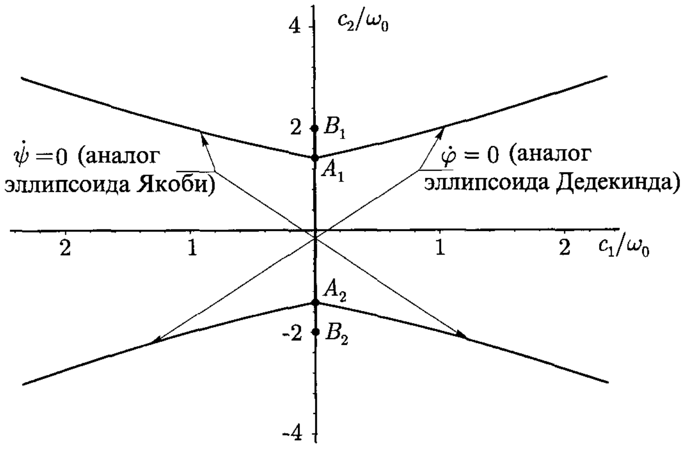


Рис. 25. В точках A_1, A_2 угловая скорость вращения $\omega^2 = \omega_0^2/2$, в точках B_1, B_2 угловая скорость вращения $\omega^2 = \omega_0^2$

Неточность в вышеприведенных работах [3, 5, 19] связана с тем, что энергия при $\omega^2 > \dfrac{\omega_0^2}{2}$ не является функцией Ляпунова, тем не менее существует линейная комбинация первых интегралов, которая может выступать в роли функции Ляпунова.

C.6. Неразрывность течения и условия существования стационарных решений

Если внешнее давление равно нулю, то, согласно Пуанкаре [10], возможно равновесие жидкого самогравитирующего тела без внутреннего течения, если

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} < 1. \tag{C.6.1}$$

какова бы ни была форма внешней поверхности.

Доказательство этой теоремы следует из требования, чтобы сила тяжести, то есть равнодействующая силы притяжения и центробежной силы, была направлена на поверхности внутрь. В этом случае давление внутри жидкости положительно. В работе Лихтенштейна [19] показано, что если условие (C.6.1) не выполняется, то и гидростатические уравнения равновесия на поверхности нельзя удовлетворить.

Рассмотрим, как условие (C.6.1) обобщается на случай стационарных эллиптических цилиндров с внутренним течением. Как известно [1], давление внутри эллиптического цилиндра определяется соотношением

$$p(t) = p_0(t) + \sigma(t)\left(1 - \frac{x_1^2}{a_1^2} - \frac{x_2^2}{a_2^2}\right),$$

следовательно, условием существования решения является

$$\sigma(t) > 0.$$

Для нахождения $\sigma(t)$ запишем уравнения Римана для эллиптического цилиндра [14]:

$$\begin{aligned} \ddot{a}_1 + \dot{\varphi}(-a_1\dot{\varphi} + a_2\dot{\psi}) + \dot{\psi}(a_2\dot{\varphi} - a_1\dot{\psi}) &= -\frac{2\omega_0^2}{a_1 + a_2} + \frac{2\sigma}{a_1}, \\ \ddot{a}_2 - \dot{\varphi}(a_2\dot{\varphi} - a_1\dot{\psi}) - \dot{\psi}(-a_1\dot{\varphi} + a_2\dot{\psi}) &= -\frac{2\omega_0^2}{a_1 + a_2} + \frac{2\sigma}{a_2}. \end{aligned} \tag{C.6.2}$$

Для разрешения системы уравнений (C.6.2) относительно σ исключим слагаемые $\ddot{a}_1, \ddot{a}_2$ с помощью уравнения связи $a_1 a_2 = 1$, дифференцируя его дважды по времени, с учетом условия $\dot{a}_1 = \dot{a}_2 = 0$. Также воспользуемся явными выражениями для $\dot{\varphi}$, $\dot{\psi}$ через интегралы движения c_1, c_2 (C.2.13). В результате получим:

$$\sigma = \frac{u(u-4)\omega_0^2 - (u-4)c_2^2 + uc_1^2}{u(u-2)(u-4)}. \tag{C.6.3}$$

Для определения области существования решения построим линии уровня функции (C.6.3) как функции двух переменных $\sigma(c_1, c_2)$. Переменная u, входящая в уравнение (C.6.3), может быть определена как корень уравнения третьей степени (C.3.5). Причем явного выражения $u(c_1, c_2)$ в данном случае не требуется, так как достаточно построить поверхность $\sigma(c_1, c_2)$ параметрически, используя уравнения (C.3.5), (C.6.3).

На рис. 26 представлены линии равного давления $\sigma(c_1, c_2) = \mathrm{const}$ для бифуркационной поверхности (C.3.6). Границы области существования физического решения отделяются кривой $\sigma(c_1, c_2) = 0$. В данном случае эта кривая представляет собой две полупрямые

$$c_1 = 0, \quad |c_2| > 2\omega_0. \tag{C.6.4}$$

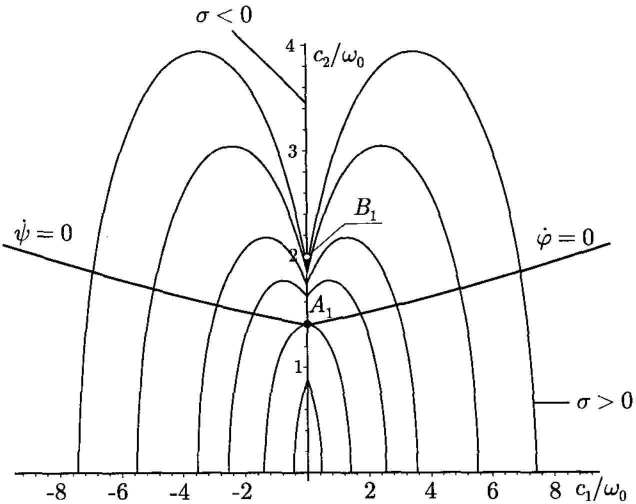


Рис. 26. Линии равного давления эллиптического цилиндра (при $c_2 < 0$ необходимо сделать симметричное продолжение). Точка A_1 соответствует угловой скорости вращения $\omega^2 = \omega_0^2/2$ (точке бифуркации цилиндра без внутреннего течения). Начиная с этого значения появляется вогнутость поверхности. Точка B_1 (точка бифуркации цилиндра с внутренним течением) соответствует $\omega^2 = \omega_0^2$

Выше было показано, что точке бифуркации $c_2 = \pm 2\omega_0$ (точки B_1, B_2 на рис. 25) соответствует угловая скорость кругового цилиндра $\omega^2 = \omega_0^2 = 2\pi G\rho$.

Напомним также, что в плоскости $c_1 = 0$ (см. рис. 22) лежит часть бифуркационной кривой (C.3.7), соответствующей круговому цилиндру (располагается внутри бифуркационной поверхности (C.3.6)). Эта кривая определяется соотношением $u = 4$. Подставляя это значение в (C.6.3), получим

$$\sigma = \frac{1}{2}\left(\omega_0^2 - \frac{c_2^2}{4}\right).$$

Следовательно, $\sigma > 0$ при $|c_2| < 2\omega_0$ (см. рис. 27). Таким образом, выше точки бифуркации на ветви кругового цилиндра физического решения не существует.

Отрицательное давление на ветвях, лежащих внутри бифуркационной поверхности, говорит о том, что в области возможных значений интегралов существуют области отрицательного давления. Физически это соответствует тому, что при значениях интегралов, попадающих в эту область, решение

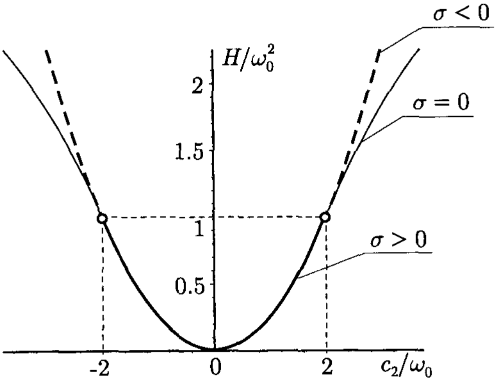


Рис. 27. Сечение бифуркационной диаграммы (C.3.6) плоскостью $c_1 = 0$. Пунктирной линией указана область, в которой $\sigma < 0$, т. е. не существует физического решения

перестает существовать, т. е. цилиндр распадается. Эти значения интегралов отделяются от физических областей возможных значений поверхностями нулевого давления, т. е. $\sigma = 0$.

Поверхности нулевого давления определяются параметрически из уравнений (С.3.4), (С.6.3) и отделяют собой полости внутри бифуркационной поверхности (рис. 28). На рис. 29 приведены сечения области физического решения поверхностями $H = \text{const}$. Анализ областей отрицательного давления показывает, что они нигде не перекрываются и всегда касаются бифуркационной поверхности (С.3.5) только по линии $c_1 = 0$ при $|c_2| > 2\omega_0$. Кривая (С.3.7), соответствующая круговому цилиндру, как и ожидалось, располагается внутри области отрицательного давления (проходит через выделенные точки на рис. 29).

Замечание 7. Требование неотрицательности давления в области физического решения имеет аналоги в динамике твердого тела, движущегося по плоскости. В данном случае аналогом условия положительности давления является условие безотрывности, т. е. неотрицательности нормальной силы реакции при движении по гладкой поверхности (см., например, [15]).

С.7. Дискуссия

Обсудим некоторые задачи, которые могут быть решены на основании результатов данной статьи.

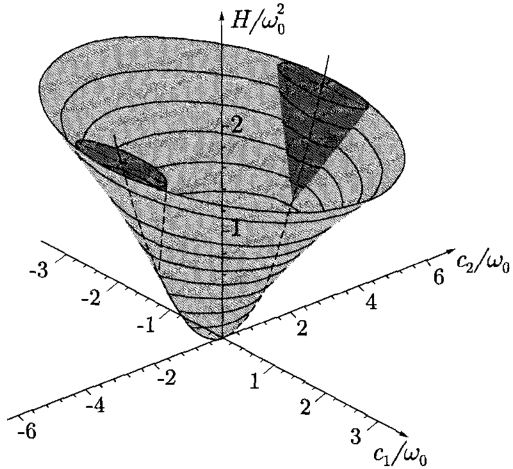


Рис. 28. Бифуркационная диаграмма эллиптического цилиндра и поверхности нулевого давления (обозначены темно-серым цветом)

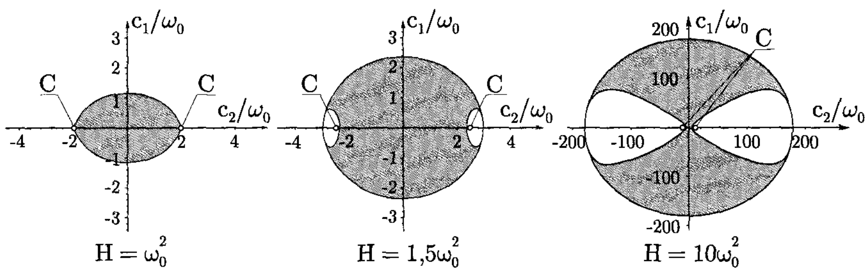


Рис. 29. Область возможных значений интегралов (выделена серым цветом) при различных значениях энергии. Область отрицательного давления, где не существует физическое решение, обозначена белым цветом. Выделенная точка соответствует круговому цилиндру

В известной работе Лава [8] показано, что жидкий эллиптический цилиндр без внутреннего течения является устойчивым по отношению к произвольным возмущениям, если отношение полуосей $\frac{1}{3} < \frac{a}{b} < 3$ (в то время как согласно результатам данной работы по отношению к эллиптическим возмущениям эти цилиндры всегда устойчивы). Выше было показано, что устойчивому цилиндру без внутреннего вращения соответствует лишь некоторая кривая на бифуркационной поверхности всевозможных эллиптических цилиндров с произвольным внутренним вращением (см. рис. 26). Поэтому возникает естественный вопрос об устойчивости эллиптического цилиндра с внутренним течением по отношению к произвольным возмущениям, который может быть решен обобщением методов Лава.

Имеются работы, посвященные поиску компьютерными методами неэллиптических фигур равновесия [16,17], которые также относятся к фигурам, не обладающим внутренним полем скоростей. В то же время, как мы видели на примере эллиптических цилиндров, возникновение внутреннего вращения является естественным с физической точки зрения. Поэтому интересно было бы указать при помощи компьютерных методов новые семейства неэллиптических фигур равновесия с внутренним полем скоростей.

Отметим также, что, помимо рассматриваемого в данной работе обобщения о решении Дирихле для жидких цилиндров, известно аналогичное решения для газовых самогравитирующих эллиптических цилиндров (для эллипсоидов подобные решения обнаружены в работах [11,14]). Эта система не является интегрируемой. Тем не менее, стационарные решения существуют, и их устойчивость является открытым вопросом.

В заключение отметим, что двумерная задача об эллиптических цилиндрах использовалась начиная с Джинса и его современников для качественного объяснения распада звезд или происхождения двойных звезд и т. п. Как правило, в основе этих заключений лежит предположение о том, что при изменении параметров системы (например, в связи с некоторыми внутренними процессами или диссипацией) она проходит через последовательность равновесных конфигураций, среди которых следует искать равновесные двойные конфигурации. С другой стороны, также вероятен сценарий, при котором в процессе эволюции параметров система приходит к границе устойчивости либо к границе разрывности (области отрицательного давления). При этом аналитических методов для описания этих процессов не существует, поэтому было бы интересно использовать компьютерный эксперимент для моделирования эволюции таких систем, в том числе распадов.

Авторы выражают благодарность Васькину В. В. и Болсинову А. В. за внимание к работе и полезные обсуждения.

Литература

[1] Dirichlet G. L. Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik (Aus dessen Nachlass hergestellt von Herrn R. Dedekind zu Zürich). J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal), 1861, Bd. 58, S. 181–216 [Дирихле Л.

Исследование одной задачи гидродинамики. Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2010. – С. 19–58].

[2] Fasso F., Lewis D. Stability properties of the Riemann ellipsoids. Arch. Rational Mech. Anal., 2001, vol. 158, pp. 259–292.

[3] Globa-Mikhaïlinko B. Sur quelques nouvelles figures d'équilibre d'une masse fluide en rotation. J. Math. Pures Appl. (7), 1916, vol. 2, pp. 1–78.

[4] Hicks W. M. On the motion of a mass of liquid under its own attraction, when the initial form is an ellipsoid. Proc. Camb. Phil. Soc., vol. 4, p. 6, 1883, pp. 1–4.

[5] Jeans J. N. On the equilibrium of rotating liquid cylinders. Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. A, 1903, vol. 200, pp. 67–104.

[6] Matthiessen L. Über die Gleichgewichtsfiguren homogener frei rotierender Flüssigkeiten. Kiel: Schwers'sehe Buchhandlung, 1857. 77 S.; Matthiessen L. Neue Untersuchungen über frei rotirende Flussigkeiten im Zustande des Gleichgewichts. Schriften der Universität zu Kiel, 1859, vol. 6, VI, 1, 74 S.

[7] Lipschitz R. Reduction der Bewegung eines flüssigen homogenen Ellipsoids auf das Variationsproblem eines einfachen Integrals, und Bestimmung der Bewegung für den Grenzfall eines unendlichen elliptischen Cylinders. J. Reine Angew. Math. (Crelle's Journal), 1874, vol. 78, pp. 245–272.

[8] Love A. E. H. On the Motion of a liquid elliptic cylinder under its own attraction. Q. J. Pure Appl. Math., 1889, vol. 23, pp. 153–158.

[9] Riemann B. Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung einer flüssigen gleichartigen Ellipsoïdes. Abh. d. Königl. Gesell. der Wiss. zu Göttingen, 1861 [Риман Б. Сочинения. М.–Л.: ГИТТЛ, 1948. С. 339–366; а также см.: Риман Б. О движении жидкого однородного эллипсоида. Динамика жидких и газовых эллипсоидов / А. В. Борисов, И. С. Мамаев. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», Инст. компьютерн. исслед., 2010. — С. 74–107].

[10] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. — М.–Л.: ОНТИ, 1936. — 376 с.

[11] Богоявленский О. И. Динамика гравитирующего газового эллипсоида. Прикл. мат. и мех., 1976, т. 40, № 2, с. 270–280.

[12] Борисов А. В., Мамаев И. С. Динамика твердого тела: Гамильтоновы методы, интегрируемость, хаос. — М.–Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2005. — 576 с.

[13] Борисов А. В., Мамаев И. С., Болсинов А. В. Топология и устойчивость интегрируемых систем. УМН, 2010, т. 65, вып. 2(392), с. 71–132.

[14] Borisov A. V., Mamaev I. S., Kilin A. A. The Hamiltonian dynamics of self-gravitating liquid and gas ellipsoids. Regul. Chaotic Dyn., 2009, vol. 14, no. 2, pp. 179–217.

[15] Васькин В. В., Наймушина О. С. К вопросу о безотрывном движении шара на гладкой плоскости. Нелинейная динамика, 2009, т. 5, № 4, с. 625–632.

[16] Дубровский А. С., Кондратьев Б. П. Неэллиптические фигуры равновесия — двумерный случай. Вестник Удмуртского университета, 2007, № 1, с. 25–36.

[17] Кондратьев Б. П. Теория потенциала и фигуры равновесия. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003. — 624 с.

[18] Литтлтон Р. А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 240 с.

[19] Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2004. — 252 с.

[20] Маркеев А. П. Теоретическая механика: Учебн. пособие для вузов. 4-е изд. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2007. — 592 с.

[21] Чандрасекхар С. Эллипсоидальные фигуры равновесия. — М.: Мир, 1973. — 288 с.

Приложение D

Фигуры равновесия жидких самогравитирующих неоднородных масс

И. А. Бизяев, Т. Б. Иванова

Введение

Впервые вопрос о формах равновесия небесных самогравитирующих тел рассмотрел Ньютон, изучая форму Земли. Им было показано, что жидкий однородный сфероид с малым эксцентриситетом будет находиться в равновесии. На сегодняшний день известно достаточно много результатов о существовании фигур равновесия *однородной* жидкости, таких как сфероид Маклорена, эллипсоид Якоби, Пуанкаре и Ляпунов с помощью функций Ламе получили фигуры равновесия, бесконечно близкие к указанным эллипсоидам [3–6].

Однако наблюдаемые в природе небесные тела существенно неоднородны, и предположение об однородности является лишь идеальной моделью, упрощающей аналитический поиск решения. Задача определения фигур равновесия *неоднородных* тел значительно сложнее и менее изучена. Клеро [7] впервые исследовал фигуры равновесия неоднородной жидкости в предположении малой угловой скорости вращения и малого изменения сжатия от слоя к слою. Ами (Hamy), исследовав неоднородный *трехосный* эллипсоид, показал, что такой эллипсоид с кусочно-постоянным распределением плотности не может находится в равновесии. Вероне [2] обобщил этот результат на случай трехосных эллипсоидов с непрерывным гомотетическим[1]

[1]Под гомотетическим расслоением понимается фигура, состоящая из слоев подобных эллипсоидов. Уравнение произвольного слоя определяется параметром m и имеет вид

$$\frac{x^2}{ma^2} + \frac{y^2}{mb^2} + \frac{z^2}{mc^2} = 1 \quad (m \text{ меняется непрерывно от 0 до 1}).$$

и гомофокальным расслоением[2]. Пицетти [7] исследовал потенциал двуслойных сфероидов и показал, что для всех распределений, за исключением гомофокального, потенциал на поверхности является трансцендентной функцией координат, что не позволяет довести задачу об определении фигур равновесия до конца. Угловые скорости вращения в случае двух гомофокальных сфероидов определены в работе [1].

Следует также отметить, что неудачная попытка найти неоднородный сфероид с гомотетическим расслоением была предпринята Чаплыгиным в неопубликованной работе [8].

В данной работе получено совместное решение гидродинамических уравнений Эйлера, непрерывности и уравнения Пуассона для гравитационного потенциала. Полученное решение соответствует гомофокальному сфероиду, в котором угловая скорость и плотность на каждом слое принимают постоянное значение.

D.1. Уравнения гидродинамики и уравнение Пуассона в криволинейной системе координат

Рассмотрим неоднородный гомофокальный сфероид, состоящий из идеальной несжимаемой жидкости. Граничная поверхность сфероида описывается уравнением

$$\frac{x^2+y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1,$$

где $a > b$, вращение происходит вокруг малой полуоси b. Уравнение Эйлера, описывающее движение жидкости, имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t}+(\mathbf{V}\nabla)\mathbf{V}=\nabla U-\frac{1}{\rho}\nabla p, \qquad (D.1.1)$$

где $\mathbf{V}$ — вектор скорости, U — гравитационный потенциал массы, p — давление, ρ — плотность. Уравнение непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}+\operatorname{div}(\rho\mathbf{V})=0. \qquad (D.1.2)$$

[2]Под гомофокальным расслоением понимается фигура, состоящая из эллипсоидов, фокусы которых остаются постоянными. Уравнение произвольного слоя определяется параметром μ и имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2+\mu}+\frac{y^2}{b^2+\mu}+\frac{z^2}{c^2+\mu}=1 \quad (\mu \text{ меняется непрерывно от } -c^2 \text{ до } 0).$$

Потенциал U, стоящий в правой части уравнения (D.1.1), удовлетворяет уравнению Пуассона:

$$\Delta U = -4\pi G\rho. \qquad (D.1.3)$$

Следуя Чаплыгину [8], будем рассматривать систему уравнений (D.1.1)–(D.1.3) в криволинейной системе координат (r, φ, μ), переход в которую от декартовых координат (x, y, z) задается следующим образом:

$$x = r\cos(\varphi), \quad y = r\sin(\varphi), \quad z = \left(b^2 + \mu - \frac{b^2+\mu}{a^2+\mu} r^2\right)^{1/2}, \qquad (D.1.4)$$

где μ— параметр гомофокального слоя. Внутри сфероида координаты (r, φ, μ) пробегают следующие значения:

$$0 \leqslant r \leqslant a, \quad 0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi, \quad -b^2 \leqslant \mu < \mu_0. \qquad (D.1.5)$$

Якобиан перехода имеет вид

$$J = \frac{r((a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2))}{\sqrt{(b^2+\mu)(a^2-r^2+\mu)}(a^2+\mu)^{3/2}}$$

и отличен от нуля во всех точках, за исключением начала отсчета, то есть базисные векторы рассматриваемой системы координат линейно независимы.

Метрический тензор и оператор Лапласа в рассматриваемой системе координат принимают вид

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \dfrac{(a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2)}{(a^2+\mu)(a^2+\mu-r^2)} & 0 & -\dfrac{r((a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2))}{2(a^2+\mu)^2(a^2+\mu-r^2)} \\ 0 & r^2 & 0 \\ -\dfrac{r((a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2))}{2(a^2+\mu)^2(a^2+\mu-r^2)} & 0 & \dfrac{((a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2))^2}{4(a^2+\mu)^3(b^2+\mu)(a^2+\mu-r^2)} \end{pmatrix};$$

$$\Delta\alpha = \frac{1}{r}\frac{\partial\alpha}{\partial r} + \frac{\partial^2\alpha}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\alpha}{\partial\varphi} + \frac{2(a^2+\mu)}{(a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2)} \times$$
$$\times\left((a^2+2b^2+3\mu)\frac{\partial\alpha}{\partial\mu} + 2(b^2+\mu)\left(r\frac{\partial^2\alpha}{\partial\mu\partial r} + (a^2+\mu)\frac{\partial^2\alpha}{\partial^2\mu}\right)\right). \qquad (D.1.6)$$

Рассмотрим сфероид, для которого поле скоростей внутри сфероида имеет вид

$$\mathbf{V} = (0, \omega(\mu), 0), \qquad (D.1.7)$$

то есть каждый слой с фиксированным значением μ вращается со своей постоянной угловой скоростью. В этом случае уравнение Эйлера в рассматриваемой системе координат примет вид

$$-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{2(a^2+\mu)(b^2+\mu)r}{(a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2)}\left(\frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial \mu}\right), \tag{D.1.8}$$

$$0 = \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi} - \frac{\partial p}{\partial \varphi}\right), \tag{D.1.9}$$

$$-\omega(\mu)^2 r^2 = r\left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)}\right) + 2(a^2+\mu)\left(\frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial \mu}\right). \tag{D.1.10}$$

В силу симметрии сфероида его потенциал U не зависит от φ. Следовательно, уравнение $(D.1.9)$ сводится к условию, что и давление не зависит от φ.

Утверждение 1. *Система уравнений* $(D.1.8)$ *и* $(D.1.10)$ *сводится к уравнениям:*

$$-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial r}, \tag{D.1.11}$$

$$0 = \frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial \mu}, \tag{D.1.12}$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выразив $\omega(\mu)^2 r$ из уравнения $(D.1.13)$ и подставив в $(D.1.8)$, получаем следующее уравнение:

$$2(a^2+\mu)\left(\frac{1}{r} - \frac{(b^2+\mu)r}{(a^2+\mu)^2 - r^2(a^2-b^2)}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial \mu}\right) = 0.$$

Учитывая $(D.1.5)$, получаем

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial \mu} = 0.$$

Тогда уравнения $(D.1.8)$ и $(D.1.10)$ становятся линейно зависимыми и сводятся к уравнению

$$-\omega(\mu)^2 r = \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial r}.$$

Таким образом, получаем систему уравнений (D.1.11) и (D.1.12), что и требовалось доказать.

Для поля скоростей (D.1.7) уравнение непрерывности (D.1.2) выполняется тождественно, уравнение Пуассона (D.1.3) принимает вид

$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi}+\frac{2(a^2+\mu)}{(a^2+\mu)^2-r^2(a^2-b^2)}\left((a^2+2b^2+3\mu)\frac{\partial U}{\partial\mu}+\right.$$
$$\left.+2(b^2+\mu)\left(r\frac{\partial^2 U}{\partial\mu\partial r}+(a^2+\mu)\frac{\partial^2 U}{\partial^2\mu}\right)\right)=-4\pi G\rho. \quad (D.1.13)$$

D.2. Решение уравнений гидродинамики и уравнения Пуассона

Таким образом, учитывая предыдущие рассуждения, интересующее нас решение должно описываться следующей системой трех уравнений для неизвестных $\omega(\mu)$, $U(r,\mu)$, $p(r,\mu)$:

$$-\omega(\mu)^2 r=\frac{\partial U}{\partial r}-\frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial r}, \quad (D.2.1)$$
$$0=\frac{\partial U}{\partial\mu}-\frac{1}{\rho(\mu)}\frac{\partial p}{\partial\mu}, \quad (D.2.2)$$
$$\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial r}+\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi}+\frac{2(a^2+\mu)}{(a^2+\mu)^2-r^2(a^2-b^2)}\left((a^2+2b^2+3\mu)\frac{\partial U}{\partial\mu}+\right.$$
$$\left.+2(b^2+\mu)\left(r\frac{\partial^2 U}{\partial\mu\partial r}+(a^2+\mu)\frac{\partial^2 U}{\partial^2\mu}\right)\right)=-4\pi G\rho(\mu). \quad (D.2.3)$$

Будем также полагать, что давление p меняется непрерывно и на поверхности принимает постоянное значение:

$$p|_{\mu_0}=p_0. \quad (D.2.4)$$

Утверждение 2. *Уравнения (D.2.1)–(D.2.3) имеют решение $\omega(\mu)$ тогда и только тогда, когда потенциал внутри сфероида имеет следующий вид:*

$$U=r^2 f_i(\mu)+g_i(\mu). \quad (D.2.5)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продифференцируем уравнение (D.2.1) по μ. Меняя порядок дифференцирования[3], получаем

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\omega(\mu)^2\rho(\mu)r) = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial p}{\partial \mu}\right) - \rho'(\mu)\frac{\partial U}{\partial r} - \rho(\mu)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial U}{\partial \mu}\right).$$

Выражая $\dfrac{\partial p}{\partial \mu}$ из $(D.2.2)$ и подставляя в предыдущее выражение, имеем

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\omega(\mu)^2\rho(\mu)r) = -\rho'(\mu)\frac{\partial U}{\partial r},$$

Интегрируя с учетом граничного условия (D.2.4), получим

$$\omega(\mu)^2\rho(\mu)r = -\rho(\mu_0)\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\bigg|_{\mu=\mu_0} + \int\limits_{\mu}^{\mu_0}\rho'(\mu)\frac{\partial U}{\partial r}\,d\mu, \qquad (D.2.6)$$

откуда следует, что потенциал должен иметь вид $(D.2.5)$.

Учитывая $(D.2.5)$ и $(D.2.3)$, из уравнений $(D.2.6)$ и $(D.2.2)$ находим

$$\omega(\mu)^2 = -\frac{\rho(\mu_0)}{\rho(\mu)r}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\right)\bigg|_{\mu=\mu_0} + \frac{1}{\rho(\mu)r}\int\limits_{\mu}^{\mu_0}\rho'(\mu)\frac{\partial U}{\partial r}\,d\mu, \qquad (D.2.7)$$

$$p = p_0 - \rho(\mu_0)U_{\mu=\mu_0} + \rho(\mu)U + \int\limits_{\mu}^{\mu_0}\rho'(\mu)U\,d\mu, \qquad (D.2.8)$$

$$U = r^2 f_i(\mu) + g_i(\mu). \qquad (D.2.9)$$

Можно показать, что система уравнений $(D.2.7)$, $(D.2.8)$ обладает следующим интегралом:

$$p = \rho(\mu)U + \frac{1}{2}\omega(\mu)^2\rho(\mu)r^2 + \text{const}. \qquad (D.2.10)$$

---

[3]По теореме Шварца, чтобы смешанные производные были равны, достаточно, но не необходимо, чтобы функция $\dfrac{\partial p}{\partial \mu}$ была непрерывна. Как следует из (D.2.8), когда $\rho(\mu)$ — непрерывная функция, то давление p и $\dfrac{\partial p}{\partial \mu}$ непрерывны, но когда функция $\rho(\mu)$ имеет конечный скачок, давление p непрерывно, так как интегрирование приводит к сглаживанию функции, а $\dfrac{\partial p}{\partial \mu}$ уже имеет конечный скачок.

Действительно, проинтегрировав (D.2.7) по r, получим

$$\frac{1}{2}\omega(\mu)^2\rho(\mu)r^2 = -\rho(\mu_0)U_{\mu=\mu_0} + \int\limits_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\mu)U\,d\mu + \text{const}.$$

Выражая $\int_{\mu}^{\mu_0} \rho'(\mu)U\,d\mu$ и подставляя в (D.2.8), получаем $(D.2.10)$.

Покажем теперь, что уравнение Пуассона, определяющее потенциал внутри сфероида действительно имеет решение в форме $(D.2.9)$. Для этого, подставляя потенциал в виде $(D.2.9)$ в уравнение Пуассона и приравнивая коэффициенты при степенях r^2 и r^0, получаем систему дифференциальных уравнений для определения $f_i(\mu)$ и $g_i(\mu)$:

$$\begin{aligned} f_i''(\mu) &+ \frac{(a^2+6b^2+7\mu)}{2(a^2+\mu)(b^2+\mu)}f_i'(\mu) - \\ &- \frac{(a^2-b^2)}{(a^2+\mu)^2(b^2+\mu)}f_i(\mu) = \frac{\pi G\rho(\mu)(a^2-b^2)}{(a^2+\mu)^2(b^2+\mu)}, \end{aligned} \tag{D.2.11}$$

$$g_i''(\mu) + \frac{(a^2+2b^2+3\mu)}{2(a^2+\mu)(b^2+\mu)}g_i'(\mu) = -\frac{\pi G\rho(\mu)+f_i(\mu)}{(b^2+\mu)}. \tag{D.2.12}$$

После перехода к новой переменной

$$x = \frac{a^2-b^2}{b^2+\mu} \tag{D.2.13}$$

система уравнений $(D.2.11)$–$(D.2.12)$ принимает вид

$$2x(x+1)^2 f_i(x)'' + 3(x^2-1)f_i(x)' - 2f_i(x) = 2\pi G\rho(x). \tag{D.2.14}$$

$$2(x+1)xg_i''(x) + (3x+1)g_i'(x) = -\frac{2(x+1)(a^2-b^2)(\pi G\rho(x)+f_i(x))}{x^2}. \tag{D.2.15}$$

Утверждение 3. *Система уравнений* $(D.2.14)$, $(D.2.15)$ *имеет следующее решение:*

$$f_i(x) = C_1\frac{x+3}{x+1} + C_2\frac{(x+3)\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}}{x+1} +$$

$$+\frac{(x+3)\operatorname{arctg}(\sqrt{x})-3\sqrt{x}}{x+1}\int\frac{(x+3)\pi G\rho(x)}{2x^{5/2}}\,dx-$$
$$-\frac{x+3}{x+1}\int\frac{\pi G\rho(x)((x+3)\operatorname{arctg}(\sqrt{x})-3\sqrt{x})}{2x^{5/2}}\,dx \qquad (D.2.16)$$

$$g_i(x)=2C_3\operatorname{arctg}(\sqrt{x})+C_4-$$
$$-\int\frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\left(\int\frac{(a^2-b^2)(\pi G\rho(x)+f_i(x))(x+1)}{x^{5/2}}\,dx\right)dx. \qquad (D.2.17)$$

Доказательство. Найдем решение уравнения (D.2.14). Рассмотрим однородное уравнение

$$2x(x+1)^2f_i(x)''+3(x^2-1)f_i(x)'-2f_i(x)=0.$$

Так как все особые точки решения уравнения находятся в его коэффициентах, решение будем искать в виде

$$f_i(x)=\frac{y(x)}{x+1}.$$

На функцию $y(x)$ получаем следующее уравнение:

$$2x(x+1)y(x)''-(x+3)y(x)'+y(x)=0.$$

Это уравнение имеет частное решение в виде полинома $y_1 = x+3$. Получим второе линейно независимое решение по форуме Лиувилля–Остроградского:

$$y_2=y_1\int\frac{e^{\int\frac{x+3}{2x(x+1)}dx}}{y_1^2}dx=(x+3)\operatorname{arctg}(\sqrt{x})-3\sqrt{x}.$$

В итоге получаем следующее решение однородного уравнения: $f_i(x) = C_1f_1(x)+C_2f_2(x)$, где

$$f_1(x)=\frac{x+3}{x+1},\quad f_2(x)=\frac{(x+3)\operatorname{arctg}(\sqrt{x})-3\sqrt{x}}{x+1}.$$

Решение неоднородного уравнения (D.2.14) можно определить методом вариации произвольной постоянной. Для функций C_1' и C_2' получаем следующие уравнения:

$$f_1C_1'+f_2C_2'=0;\quad f_1'C_1'+f_2'C_2'=\frac{\pi G\rho(x)}{x(x+1)^2}.$$

Откуда

$$C_1' = -\frac{f_2 \pi G\rho(\mu)}{x(x+1)^2}, \quad C_2' = \frac{f_1 \pi G\rho(\mu)}{x(x+1)^2}.$$

В итоге имеем следующее решение уравнения (D.2.14):

$$f_i(x) = C_1 f_1(x) + C_2 f_2(x) + f_2(x)\int f_1(x) g(x)\frac{dx}{W} - f_1 \int f_2(x) g(x) \frac{dx}{W},$$

где

$$g(x) = \frac{\pi G\rho(x)}{(x+1)^2 x}, \quad W = \frac{2x^{3/2}}{(x+1)^3} \text{ — определитель Вронского.}$$

Решение уравнения (D.2.15) будем искать методом Бернулли в виде $g_i' = u(x)v(x)$. На функции $v(x)$ и $u(x)$ получаем следующие уравнения:

$$v(x)' + \frac{3x+1}{2x(x+1)} v(x) = 0, \quad u(x)' = -\frac{(a^2-b^2)(\pi G\rho(x) + f_i(x))(x+1)}{x^{5/2}},$$

которые имеют следующие решения:

$$v(x) = \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}, \quad u(x) = \int -\frac{(a^2-b^2)(\pi G\rho(x) + f_i(x))(x+1)}{x^{5/2}}\, dx + C_3.$$

Учитывая

$$g(x) = \int u(x)v(x)\, dx + C_4,$$

получаем решение (D.2.17), что и требовалось доказать.

Вне сфероида потенциал U удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U = 0.$$

Будем искать решение этого уравнения также в виде (D.2.5). Тогда на функции $f_e(x)$ [4] и $g_e(x)$ получаем следующие уравнения:

$$2x(x+1)^2 f_e(x)'' + 3(x^2-1) f_e(x)' - 2 f_e(x) = 0, \qquad (D.2.18)$$

$$2(x+1)x g_e(x)'' + (3x+1) g_e(x)' = -\frac{2(x+1)(a^2-b^2) f_e(x)}{x^2}. \qquad (D.2.19)$$

[4] Индекс e указывает, что это потенциал вне сфероида.

Уравнения (D.2.18) и (D.2.19) имеют следующие решения:

$$f_e(x) = C_5\frac{x+3}{x+1} + C_6\frac{(x+3)\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) - 3\sqrt{x}}{x+1}; \qquad (D.2.20)$$

$$g_e(x) = -\frac{2((a^2-b^2)C_6(x-1) - C_7x)}{x}\operatorname{arctg}(\sqrt{x}) + \frac{2(a^2-b^2)(C_5 - C_6\sqrt{x})}{x} + C_8. \qquad (D.2.21)$$

Перейдя в (D.2.16), (D.2.17), (D.2.20) и (D.2.21) от переменной x к μ, получаем

$$f_i(\mu) = C_2\left(\frac{a^2+2b^2+3\mu}{a^2+\mu}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right) - \frac{3\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2+\mu}}{a^2+\mu}\right) + C_1\frac{a^2+2b^2+3\mu}{a^2+\mu} + \Psi(\mu), \qquad (D.2.22)$$

$$g_i(\mu) = 2C_3\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right) + C_4 + \Phi(\mu), \qquad (D.2.23)$$

где $\Psi(\mu)$, $\Phi(\mu)$ — интегралы в уравнениях (D.2.16), (D.2.17),

$$f_e(\mu) = C_6\left(\frac{a^2+2b^2+3\mu}{a^2+\mu}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right) - \frac{3\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2+\mu}}{a^2+\mu}\right) + C_5\frac{a^2+2b^2+3\mu}{a^2+\mu}, \qquad (D.2.24)$$

$$g_e(\mu) = 2C_5(b^2+\mu) - 2C_6\left((a^2-2b^2-\mu)\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right) + \sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2+\mu}\right) + 2C_7\operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right) + C_8. \qquad (D.2.25)$$

Для определения констант воспользуемся следующими соображениями.

1. Функция $(D.2.22)$ при $\mu = -b^2$ $f_i(\mu)$ не имеет особенностей. Производная

$$\frac{\partial f_i}{\partial \mu} = \frac{C_2}{a^2+\mu}\left(\frac{3}{2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+\mu}} - 3\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+\mu}}\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{(a^2+2b^2+3\mu)\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+\mu}(a^2+\mu)}\right)-$$
$$-\frac{C_2}{(a^2+\mu)^2}\left(3\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2+\mu}-(a^2+2b^2+3\mu)\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+\mu}}\right)\right)+$$
$$+\frac{3C_1}{a^2+\mu}-\frac{C_1(a^2+2b^2+3\mu)}{(a^2+\mu)^2}+\frac{\partial\Psi(\mu)}{\partial\mu}. \qquad (D.2.26)$$

в точке $\mu = -b^2$ стремится к $+\infty$, то есть имеет особенность, для устранения которой полагаем $C_2 = 0$.

2. Аналогично, производная

$$\frac{\partial g_i}{\partial \mu} = -C_3\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{b^2+\mu}(a^2+\mu)}+C_4+\frac{\partial\Phi}{\partial\mu} \qquad (D.2.27)$$

в точке $\mu = -b^2$ имеет особенность, для устранения которой полагаем $C_3 =$ $= 0$.

3. Также учтем, что потенциал на бесконечности стремится к нулю, то есть

$$\lim_{\mu\to\infty} f_e = 3C_5 = 0,$$
$$\lim_{\mu\to\infty} g_e = C_8 = 0.$$

Таким образом, в выражениях для потенциала внутри сфероида $(D.2.22)$, $(D.2.23)$ и вне сфероида $(D.2.24)$, $(D.2.25)$ остается четыре произвольные постоянные. Будем определять их из условий непрерывности потенциала и его первой производной на границе сфероида.

D.3. Однородный сфероид

Покажем, что полученное в общем виде решение содержит известное решение сфероида Маклорена, который является частным случаем гомофокального сфероида при $\rho(\mu) = \mathrm{const}$. Выражение для угловой скорости $(D.2.7)$ принимает следующий вид:

$$\omega^2 = -2f_i(\mu)|_{\mu=0}. \qquad (D.3.1)$$

Вычислим гравитационный потенциал сфероида Маклорена. Для него уравнения $(D.2.22)$, $(D.2.23)$, $(D.2.24)$ и $(D.2.25)$ принимают вид

$$f_i = C_1\frac{a^2+2b^2+3\mu}{a^2+\mu} + \frac{2\pi G\rho(b^2+\mu)}{a^2+\mu},$$

$$g_i = -2C_1(b^2+\mu) + C_4 - 2\pi G\rho(b^2+\mu),$$

$$f_e = \frac{C_6}{a^2+\mu}\left((a^2+2b^2+3\mu)\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right) - 3\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2+\mu}\right),$$

$$g_e = 2C_6\left((a^2-2b^2-\mu)\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right) + 2\sqrt{a^2-b^2}\sqrt{b^2+\mu}\right) + $$
$$+2C_7\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2+\mu}}\right).$$

Из условия непрерывности потенциала при $\mu = 0$ получаем

$$C_1 = \frac{\pi G\rho b}{(a^2-b^2)^{3/2}}\left(b\sqrt{a^2-b^2} - a^2\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}\right)\right),$$

$$C_4 = \frac{2a^2b\pi G\rho}{\sqrt{a^2-b^2}}\,\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{a^2-b^2}{b^2}}\right).$$

Тогда из $(D.3.1)$ получаем

$$\omega^2 = \frac{2b\rho G\pi(a^2+2b^2)}{(a^2-b^2)^{3/2}}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right) - \frac{6b^2\rho G\pi}{a^2-b^2}. \qquad (D.3.2)$$

Переходя к эксцентриситету $e^2 = (a^2-b^2)/a^2$, получаем конечное выражение для угловой скорости (рис. 30):

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\rho} = \frac{\sqrt{1-e^2}(3-2e^2)}{e^3}\arcsin(e) - \frac{3(1-e^2)}{e^2}. \qquad (D.3.3)$$

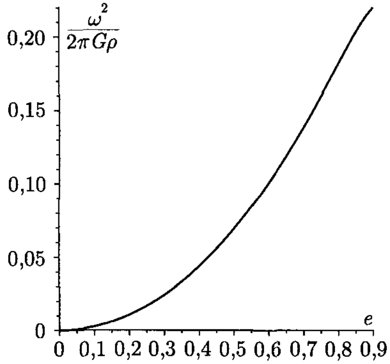


Рис. 30. Угловая скорость $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$ сфероида Маклорена

Выражение (D.3.3) совпадает с известным выражением для угловой скорости Маклорена [4].

Давление внутри сфероида Маклорена получаем из (D.2.8):

$$p = p_0 - \rho(r^2(f(0) - f(\mu)) + g(0) - g(\mu)).$$

Подставляя потенциал, в конечном итоге получаем

$$p = p_0 - \frac{2\pi G\rho^2\mu(r^2(a^2 - b^2) - (a^2(a^2 + \mu))}{(a^2 + \mu)(a^2 - b^2)} \times$$
$$\times \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}} \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}\right) - 1\right). \quad (D.3.4)$$

D.4. Сфероид, состоящий из двух гомофокальных слоев

Рассмотрим сфероид с кусочно-постоянной плотностью (рис. 31). Будем обозначать характеристики, относящиеся к внешнему сфероиду, с индексом 1, а к внутреннему сфероиду — с индексом 2. Малые полуоси и эксцентриситеты сфероидов вследствие гомофокальности удовлетворяют соотношениям

$$a_1^2 - b_1^2 = a_1^2 e_1^2, \quad a_2^2 - b_2^2 = a_2^2 e_2^2, \quad \frac{e_2}{e_1} = \frac{a_1}{a_2}, \qquad e_2 > e_1.$$

Потенциал на поверхности первой и второй оболочки будем искать как сумму потенциалов однородных сфероидов (рис. 32). В этом случае

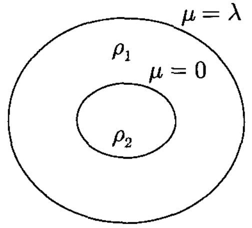


Рис. 31. Сфероид состоит из двух однородных оболочек. Внутренняя оболочка с плотностью ρ_2 и координатой на поверхности $\mu = 0$. Внешняя оболочка с плотностью ρ_1 и координатой на поверхности $\mu = \lambda = \mathrm{const}$, $\rho_2 > \rho_1$

уравнения $(D.2.7)$ и $(D.2.8)$ примут вид

$$\omega(\mu)^2 = -\frac{2\rho(\lambda)f(\lambda)}{\rho(\mu)} + \frac{2}{\rho(\mu)}\int\limits_{\mu}^{\lambda}\rho(\mu)'f(\mu)\,d\mu, \qquad (D.4.1)$$

$$p = -\rho(\lambda)(r^2f(\lambda)+g(\lambda)) + \rho(\mu)(r^2f(\mu)+g(\mu)) + \\ + \int\limits_{\mu}^{\lambda}\rho(\mu)'(r^2f(\mu)+g(\mu))\,d\mu, \qquad (D.4.2)$$

где $\rho(\mu) = (\rho_1-\rho_2)\chi(\mu)+\rho_2$, $\chi(\mu)$ – функция Хэвисайда: $\chi(\mu) = 0$ при $\mu < 0$ и $\chi(\mu) = 1$ при $\mu \geqslant 0$.

Покажем, что угловые скорости внешнего ω_1^2 и внутреннего ω_2^2 сфероидов удовлетворяют соотношениям

$$\frac{\omega_1^2}{2\pi G\rho_1} = \left(\frac{\sqrt{1-e_1^2}(3-2e_1^2)}{e_1^3} + \frac{\sqrt{1-e_2^2}(3-2e_1^2)}{e_2^3}\varepsilon\right)\arcsin(e_1) - \\ - \frac{3(1-e_1^2)}{e_1^2} - \frac{3e_1\sqrt{1-e_2^2}\sqrt{1-e_1^2}}{e_2^3}\varepsilon, \qquad (D.4.3)$$

$$\frac{\omega_2^2}{2\pi G\rho_1}(\varepsilon+1) = \frac{\omega_1^2}{2\pi G\rho_1} + \varepsilon^2\left(\frac{\sqrt{1-e_2^2}(3-2e_2^2)}{e_2^3}\arcsin(e_2) - \frac{3(1-e_2^2)}{e_2^2}\right) + \\ + \varepsilon\left(\frac{\sqrt{1-e_1^2}(3-2e_1^2)}{e_1^3}\arcsin(e_1) - \frac{3-e_1^2-2e_2^2}{e_1^2}\right), \qquad (D.4.4)$$

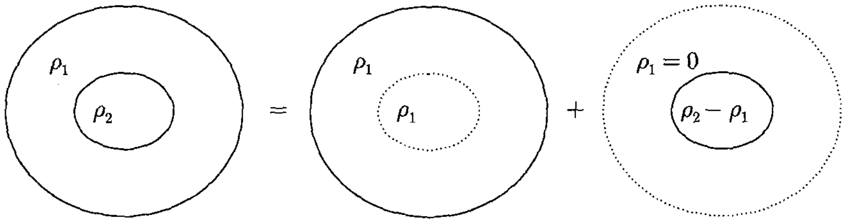


Рис. 32. Потенциал определяется как сумма потенциалов сфероида с плотностью ρ_1 и другого сфероида с плотностью $\rho_2 - \rho_1$

где e_2 и e_1 эксцентриситеты внутреннего и внешнего сфероидов, $\varepsilon = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_1}$.

Действительно, для внешней поверхности внешней оболочки ($\mu = \lambda$) уравнение (D.4.1) принимает вид

$$\omega_1^2 = -2f(\lambda),$$

$$f(\lambda) = \pi G \rho_1 \left(\frac{3b_1^2}{(a_1^2 - b_1^2)} - \frac{a_1^2 b_1 (a_1^2 + 2b_1^2)}{a_1^2 (a_1^2 - b_1^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a_1^2 - b_1^2}{b_1^2}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\varepsilon a_2^2 b_2 a_1^2 (a_1^2 + 2b_1^2)}{a_1^2 (a_2^2 - b_2^2)^{3/2}} \operatorname{arctg}\left(\sqrt{\frac{a_2^2 - b_2^2}{b_2^2 + \lambda}}\right) + \frac{3\varepsilon a_2^2 b_2 \sqrt{b_2^2 + \lambda}}{(a_2^2 - b_2^2)\sqrt{a_2^2 + \lambda}} \right).$$

Перейдя к эксцентриситетам e_1 и e_2, получим (D.4.3).

Для внешней оболочки внутреннего сфероида ($\mu = 0$) уравнение (D.4.1) принимает вид

$$\omega_2^2 \rho_2 = -2f(\lambda)\rho_1 + 2(\rho_1 - \rho_2) \int\limits_0^\lambda \delta(\mu) f(\mu)\, d\mu.$$

Интегрируя, после элементарных преобразований, получаем

$$\omega_2^2(\varepsilon + 1) = \omega_1^2 - 2\varepsilon f(0),$$

$$f(0) = \pi G \rho_1 \left(\varepsilon \left(\frac{3(1 - e_2^2)}{e_2^2} - \frac{\sqrt{1 - e_2^2}(3 - 2e_2^2)}{e_2^3} \arcsin(e_2) \right) - \right.$$
$$\left. - \frac{\sqrt{1 - e_1^2}(3 - 2e_1^2)}{e_1^3} \arcsin(e_1) + \frac{3 - e_1^2 - 2e_2^2}{e_1^2} \right).$$

Зависимости угловых скоростей внутреннего и внешнего сфероида от эксцентриситеты e_1 приведены на рис. 33. Из рисунка видно, что угловая скорость внутренней оболочки всегда больше скорости внешней оболочки. Причем при увеличении ε, то есть разности плотностей, разрыв между скоростями увеличивается.

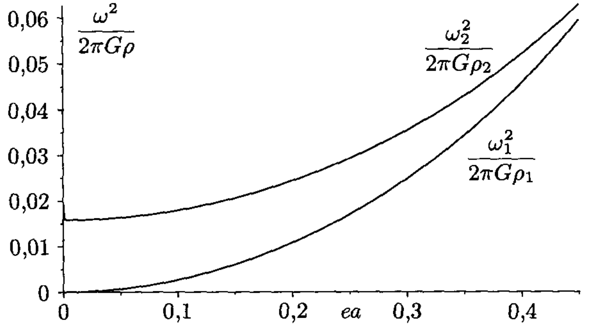


Рис. 33. Графики зависимости угловых скоростей внутренней оболочки $\frac{\omega_2^2}{2\pi G\rho_2}$ и внешней $\frac{\omega_1^2}{2\pi G\rho_1}$ оболочек в зависимости от e_1 ($\varepsilon = 0.1$, $e_2 = 0.5$)

Полученные значения угловых скоростей внешнего и внутреннего сфероидов совпадают с полученными в работе [1], в которой гидродинамические уравнения рассматриваются в декартовой системе координат, что приводит к громоздким преобразованиям и выражениям. Кроме того, полученные в работе [1] результаты нельзя обобщить на случай произвольного распределения плотности.

D.5. Сфероид с непрерывным распределением плотности

Планеты, согласно современным представлениям, состоят из ядра, плотность которого имеет постоянное значение, и оболочки, плотность которой убывает к поверхности. Поэтому рассмотрим сфероид с непрерывным распределением плотности $\rho(\mu)$, состоящий из ядра с постоянной плотностью ρ_0, и оболочки, в которой плотность непрерывно убывает и на поверхности равна $\rho_0/2$ (рис. 34, 35):

$$\rho(\mu,\lambda) = \frac{\rho(-2\mu^4 - 5b^2\mu^3 - 3b^4\mu^2 + 2\lambda^2(2\lambda + 3b^2)(\lambda + b^2))}{\lambda^2(3b^4 + 5\lambda b^2 + 2\lambda^2)}, \qquad (D.5.5)$$

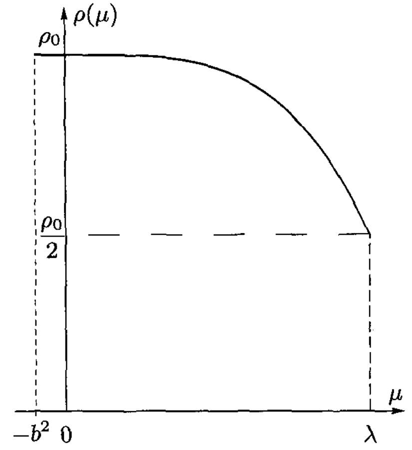


Рис. 34. Функция плотности D.5.5 при $b = 2$, $\lambda = 40$

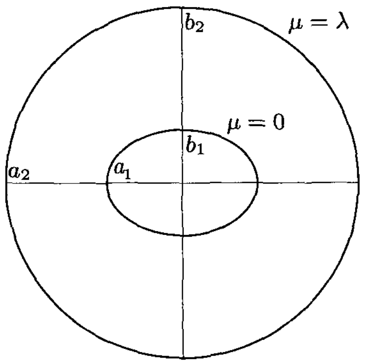


Рис. 35. Сфероид в сечении плоскостью, проходящей через ось вращения, $a_1 = 3$, $b_1 = 2$, $\lambda = 40$, $a_2 = \sqrt{a_1^2 + \lambda} = 7$, $b_2 = \sqrt{b_1^2 + \lambda} = 6.5$

где b характеризует размеры ядра, λ характеризует размеры внешней оболочки.

Проведя вычисления, аналогичные тем, которые были проведены для сфероида Маклорена и сфероида с кусочно-постоянной плотностью (в связи с большими выкладками здесь их не приводим), получаем изменение угловой скорости $(D.2.7)$ в зависимости от параметра слоя μ. Эта зависимость приведена на рис. 36.

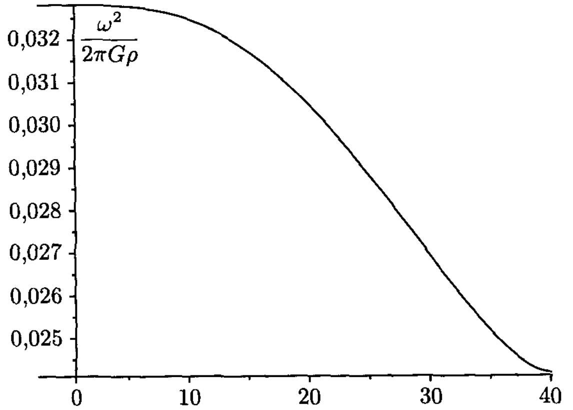


Рис. 36. Изменение угловой скорости $\frac{\omega^2}{2\pi G\rho}$ в зависимости от параметра слоя μ для сфероида (рис. 35) с плотностью (D.5.5)

Литература

[1] Montalvo D., Martinez F. J., Cisneros J. On equilibrium figures for ideal fluids in the form of confocal spheroids rotating with common and different angular velocities. 1982.

[2] Véronnet A. Rotation de l'ellipsoide heterogene et figure exacte de la Terre. Journ. de Mathematiques pures et appliquees, 1919.

[3] Аппель П. Фигуры равновесия вращающейся однородной жидкости. — М.–Л.: ОНТИ, 1936. — 376 с.

[4] Литтлтон Р. А. Устойчивость вращающихся масс жидкости. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 240 с.

[5] Лихтенштейн Л. Фигуры равновесия вращающейся жидкости. — М.–Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001. — 252 с.

[6] Ляпунов А. М. Собрание сочинений. Т. 3. 1959. — 376 с.

[7] Пицетти П. Основы механической теории фигуры планет. — М.: 1933. — 170 с.

[8] Чаплыгин С. А. Установившееся вращение жидкого неоднородного сфероида. Собрание сочинений. Т. 2. Гидродинамика. Аэродинамика. 1948. — С. 576–585.

Указатель

Венцеслас С. Ярдецкий

ТЕОРИИ ФИГУР НЕБЕСНЫХ ТЕЛ

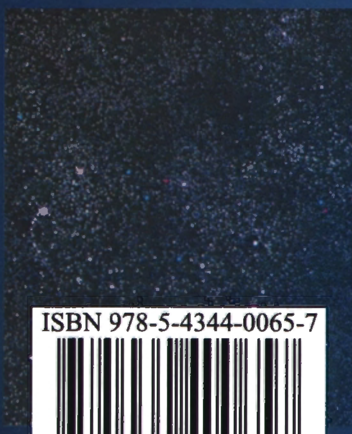
Дизайнер А. А. Гурьянова
Технический редактор А. В. Бакиев
Компьютерный набор и верстка Н. С. Агафонова
Корректор О. А. Шемякина

Подписано в печать 10.08.2012. Формат $60 \times 84^{1}/_{16}$.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 17,44. Уч. изд. л. 18,75.
Гарнитура Таймс. Бумага офсетная № 1. Заказ № 12-41.

АНО «Ижевский институт компьютерных исследований»
426034, г. Ижевск, ул. Университетская, 1.
http://shop.rcd.ru E-mail: mail@rcd.ru Тел./факс: +7 (3412) 500–295

БИБЛИОТЕКА ЖУРНАЛА «РЕГУЛЯРНАЯ И ХАОТИЧЕСКАЯ ДИНАМИКА»

R&C Dynamics



ISBN 978-5-4344-0065-7

9 785434 400657